

# **RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE**

Datorzinātnes un informācijas tehnoloģijas fakultāte  
Lietišķās matemātikas institūts  
Varbūtību teorijas un matemātiskās statistikas katedra

**Aleksejs Mališevs**

Finanšu inženiermatemātikas programmas students

(stud. apl. nr. 151RIC080)

## **KO MUMS PASAKA PROCENTU LIKMES TERMIŅSTRUKTŪRAS MODEĻI PAR NĀKOTNES PERSPEKTĪVĀM: DAŽĀDU EIROPAS SAVIENĪBAS VALSTU KONTEKSTĀ**

**MAGISTRA DARBS**

Zinātniskais vadītājs

Prof. Dr. math.

Viktors Ajevskis

RĪGA 2021

Maģistra darbs izstrādāts Varbūtību teorijas un matemātiskās statistikas katedrā

Darba autors: Aleksejs Mališevs 2021.g. 01. jūnijs

Zinātniskais vadītājs: Viktors Ajevskis 2021.g. 01. jūnijs

Maģistra darbs pielaists aizstāvēšanai:

Katedras vadītājs: Dr.math., as.prof. Nataļja Budkina \_\_\_\_\_

202\_.g. \_\_\_\_

Maģistra darbs aizstāvēts \_\_\_\_\_ katedras maģistra darbu  
aizstāvēšanas komisijas 202\_. gada \_\_\_\_ sēdē, protokola Nr. \_\_\_\_ un  
novērtēts ar atzīmi \_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_ katedras maģistra darbu aizstāvēšanas komisijas  
sekretāre: \_\_\_\_\_

## Anotācija

Maģistra darbs rakstīts latviešu valodā, to veido ievads, trīs daļas, secinājumi un priekšlikumi. Darba apjoms 68 lpp., tajā iekļauti 33 attēli, 6 tabulas, 25 formulas. Darbā pievienots 1 pielikums.

Darba mērķis ir: Pielietot piemērotākos procentu likmes termiņstruktūras modeļus Eiropas Savienību valstu obligācijām, lai novērtētu nākotnes tendences ekonomikas attīstībā un obligāciju tirgū.

Pirmajā darba daļā darba autors apskatīja procentu likmes ietekmi uz ekonomiskiem procesiem kopumā un finanšu tirgus tendencēm. Kā arī tika apskatīti vairāki procentu likmes termiņstruktūras modeļi un tika definēti piemērotākie modeļi mūsdienu obligāciju ienesīguma termiņstruktūras dinamikas analīzei. Papildus tika apskatītas ekonometriskas metodes, kuras tika pielietotas darbā, izmantojot izvēlētos modeļus.

Otrajā daļā darba autors analizēja makroekonomisko faktoru saistību ar procentu likmes termiņstruktūras dinamiku. Tika izvēlētas piecas Eiropas Savienības dalībvalstis tālākai analīzei, iegūti vēsturiski dati par obligāciju ienesīgumiem no Bloomberg termināļa. Veikta procentu likmes statistiska analīze, kā korelācijas analīze un lineāra regresija. Kā arī tika pielietoti četri nelineāri procentu likmes modeļi obligāciju ienesīguma analīzei, rezultāti tika atspoguļoti grafiski.

Trešajā daļā darba autors analizēja visu apskatīto valstu ēnu procentu likmju dinamikas ietekmējošo faktoru īpatsvaru. No modeļiem iegūtas informācijas, tika novērtēti papildu rādītāji, kā laiks līdz ēnu procentu likme sasniegs zemāko robežu un monetārās politikas efektivitāte. Papildus tika apkopoti iegūtie prognozes rezultāti un izvirzīti secinājumi balstoties uz iepriekš iegūto informāciju.

Nozīmīgākie secinājumi: Apskatot nākotnes prognozes attiecībā uz ēnu procentu likmi, var secināt, ka visām apskatītām valstīm ēnu procentu likme būs zem zemākas robežas tuvāko gadu. Apskatot termiņstruktūras nākotnes prognozes, var redzēt, ka tā paliks slīpāka, kas nozīmē, ka ilgtermiņa procentu likme palielināsies. Kas savukārt, norāda uz investoru gaidām par ekonomisko izaugsmi.

**Atslēgas vārdi: Procentu likme, nelineāri modeļi, Eiropas Savienības valstu obligācijas.**

## **Annotation**

The Master's work is written in Latvian, consisting of an introduction, three parts, conclusions and proposals. Volume of work is 68 pages, including 33 images, 6 tables, 25 formulas. Annex 1 added at work.

The aim of the work is to apply the most appropriate interest rate term structure models to European bonds to assess future trends in economic development and the bond market.

In the first part of the work, the author looked at the impact of interest rates on economic processes in general and financial market trends. Also, several interest rate term structure models were considered and the most suitable models for the analysis of modern bond yield term structure dynamics were defined. In addition, viewed econometric methods that was used in the work.

In the second part, the author analyzed the relationship between macroeconomic factors and the dynamics of the interest rate term structure. Five European Union member states were selected for further analysis, was obtain historical data from Bloomberg terminal. Was performed statistical analysis of interest rate, such as correlation and linear regression. Also was used four nonlinear interest rate models to bond yield analysis, the result was presented graphically.

In the third part, the author analyzed the proportion of factors influencing the dynamics of shadow interest rates in all the countries considered. From the information obtained from the models was assessed additional indicators as the time until the shadow rate reaches its lower limit and the effectiveness of monetary policy. In addition, the obtained forecast results were summarized, and conclusions were drawn based on the previously obtained information.

The most important conclusions: Looking at future projections for the shadow interest rate, it can be concluded that the shadow interest rate this year will be below the lower limit for all countries. Looking at the outlook for the term structure, it will become more sloping, which means that the long-term interest rate will increase. Which in turn indicates investors' expectations for economic growth.

**Keywords: Interest rate, nonlinear models, European Union government bonds.**

## Satura rādītājs

Ievads .....	7
1. PROCENTU LIKMES TEORIJA .....	9
1.1. Procentu likme būtība .....	9
1.1.1. Procentu likmes saistība ar finanšu instrumentiem.....	11
1.1.2. Procentu likmes termiņstruktūra.....	13
1.1.3. Modeļu nepieciešamība procentu likmes termiņstruktūras novērtēšanai.....	15
1.2. Procentu likmes modelēšana .....	15
1.2.1. Stohastiskais process .....	15
1.2.2. Pamata modeļi.....	17
1.2.3. Vairāku faktoru modeļi .....	19
1.2.4. Affines modeļi .....	21
1.2.5. Ēnu procentu likme .....	23
1.2.6. Makroekonomiskie faktori .....	26
1.3. Modeļu parametru novērtēšanas ar ekonometriskām metodēm .....	28
1.3.1. Kalmana Filtrs .....	28
1.3.2. Maksimālās ticamības novērtēšana.....	29
2. PROCENTU LIKMES ANALĪZE .....	31
2.1. Makroekonomisko faktoru ietekme uz procentu likmi .....	31
2.1.1. Pētāmo valstu makroekonomiska stāvokļa apskats .....	31
2.1.2. Procentu likme statistiskie fakti.....	34
2.1.3. Kredītreitings .....	37
2.2. Valstu procentu likmes novērtējums un ienesīguma likmes prognozē.....	39
2.2.1. Vācija .....	40
2.2.2. Francija .....	43
2.2.3. Spānija .....	45

2.2.4.Polija.....	48
2.2.5.Latvija.....	51
3. PROCENTU LIKMJU MODEĻU IEGŪTO REZULTĀTU INTERPRETĀCIJA .....	54
3.1. Ēnu procentu likmes galveno komponentu analīze .....	54
3.2. Procentu likmes modeļu un to parametru interpretācija .....	57
3.2.1. Procentu likmes termiņstruktūras dinamikas novērtēšana .....	57
3.2.2. Makroekonomisko faktoru attīstība .....	61
3.2.3. Izmantoto modeļu apskats .....	62
Secinājumi un priekšlikumi .....	64
Izmantotās literatūras un avotu saraksts.....	66
Pielikums .....	69

## Ievads

Globāla ekonomika ir liels organisms, kas mijiedarbojas savā starpā, kontrolē šo organismu lielās centrālās bankas tādas kā ECB vai FED. Galvenais kontroles rīks ir procentu likme, uz kuru balstoties tirgus dalībnieki pieņem lēmumus. Šie lēmumi var būt saistīti ar ekonomikas attīstības gaidām, investīciju un aizņēmumu izvēli makro vai mikro līmenī. Procentu likme ir ļoti svarīgs finanšu rādītājs pasaulē, jo tā tieši ietekmē daudzus finanšu instrumentus, kuru kapitalizācija tiek mērīta triljonos. Vērtējot jebkādu finanšu lēmumu, bieži vien, procentu likme ietekmē daļu no lēmuma pieņemšanas, jo tieši procentu likme dod atbildi uz jautājumu, cik vērts ir ieguldījums vai cik dārgs ir aizņēmums u.t.t. Makroekonomiskajā līmenī procentu likme un tā termiņstruktūra parāda ekonomisko stāvokli, uzņēmumu un valsts spēju attīstīties. Līdz ar to saprotot procentu likmes svarīgumu, nepieciešams pievērst tai lielāku uzmanību, kā arī novērtēt procentu likmes termiņstruktūru un tās dinamiku, iespējamo kustības virzienu un svārstības, kas varētu notikt nākotnē.

Šī darba ietvaros tiks apskatīta procentu likmes un ar to saistoša teorija, praktiskā pielietošana ekonomikas novērtēšanai. Lielākais uzsvars tiek likts uz Eiropas Savienības izvēlēto dalībvalstu obligāciju ienesīguma termiņstruktūras analīzi, dinamikas novērtēšanu un nākotnes prognozi. Kā rezultātā plānots iegūt informāciju par monetārās stimulēšanas efektivitāti, ēnu procentu likmes novērtējumu, informāciju par dažādu Eiropas Savienību dalībvalstu procentu likmes termiņstruktūras dinamikas līdzību un atšķirībām. Papildus tiks iegūta prognoze par procentu likmes termiņstruktūras attīstību uz nākamajiem desmit mēnešiem.

Pētījuma objekts ir Eiropas Savienības valstu obligācijas, ienesīgumu dinamikas attīstība no 2010. gada līdz 2021. gada februārim un sakarības ar monetāro politiku kopumā. Darbā tiks izskatītas Vācija, Francija, Polija, Spānija un Latvijas valsts obligāciju ienesīgumi līdz desmit gadiem ieskaitot.

Darba mērķis ir: Pielietot piemērotākos procentu likmes termiņstruktūras modeļus Eiropas Savienību valstu obligācijām, lai novērtētu nākotnes tendences ekonomikas attīstībā un obligāciju tirgū. Papildus tam darbā tiek novērtēta Eiropas Savienības monetārās stimulēšanas efektivitāte un laiks līdz ēnu procentu likme sasniegs īstermiņa procentu likmi.

Darba uzdevumi ir:

- Iepazīties ar zinātnisko literatūru par procentu likmi un ar to saistošu informāciju,

- Iepazīties ar vairāku autoru lineāro un nelineāro procentu likmes modeļiem,
- Pielāgot modeļus saviem datiem un R programmas kodam,
- Iegūt obligāciju cenas un makroekonomisko faktoru datus,
- Izpētīt lineāras sakarības starp procentu likmi un makroekonomiskiem faktoriem,
- Pielietot modeļus un aprakstīt iegūtos rezultātus,
- Aprēķināt monetārās stimulēšanas efektivitāti un ēnas procentu likmes laiku līdz īstermiņa procentu likmei,
- Salīdzināt dažādu autoru rezultātus
- Izveidot secinājumus un priekšlikumus.

Darba ierobežojumi ir saistīti ar ierobežotu piekļuvi datu resursiem un jaunāko datu iegūvi. Darba apjoma un laika ierobežojumu dēļ nav iespējams apskatīt vairāku valstu obligācijas ienesīgumus, lai iegūtu labāku priekšstatu par Eiropas Savienības obligāciju ienesīguma attīstību, kas arī cieši korelē ar ekonomikas attīstību.

Pētījuma periods ir no 1. septembra 2020. gada līdz 15. maija 2021. gadam.

Darbā tiek plānots izmantot informāciju iegūtu no zinātniskām publikācijām, speciālās literatūras, grāmatām un atzītām statistikas bāzēm.



# 1. PROCENTU LIKMES TEORIJA

## 1.1. Procentu likme būtība

Procentu likme ir atlīdzība investoram, ko maksā debitors par aizņemtajiem līdzekļiem. Procentu likme tiek izteikta procentos no aizdevuma summas. Lielākās starpbanku aizņēmuma procentu likmes, piemēram, LIBOR vai EIRIBOR, parāda ar kādu procentu likmi lielākās bankas ir gatavas aizdot naudas līdzekļus noteiktajā valūtā citām bankām. Šie rādītāji parāda, kāda ir finanšu institūciju interese par noteikto valūtu un cik droši bankas jūtās aizdodot naudu citām bankām. Termins procentu likme tiek arī izmantots fiksēto ienākumu vērtspapīros, lai izteiktu investora ieguvumu no dotā finanšu instrumenta.

Procentu likme ir ļoti svarīgs radītājs visā pasaulē. Ir pierādīts fakts, ka procentu likme ietekmē jebkuras organizācijas vai mājsaimniecības lēmuma pieņemšanu, sākot ar mājsaimniecību, uzņēmumu vai valsti. Samazinoties procentu likmei, nauda paliek lētāka, kas dod iespēju bankām aizņemt vairāk naudas un piedāvāt saviem klientiem konkurētspējīgāku kredīta likmi. Zemāka likme stimulē mājsaimniecības un uzņēmumus aizņemt vairāk, kas palielina patēriņu un investīciju apjomus, kā arī stimulē tirgus dalībniekus meklēt alternatīvās ieguldījuma iespējas, lai apmierinātu savas ienesīguma vēlmes. Kā rezultātā izriet likumsakarība, ka samazinoties procentu likmei tirgus dalībnieki uzņemas lielāku finanšu riskus. Tās varētu būt mājsaimniecības vai uzņēmumi, kas aizņemas pārāk daudz pie zemas procentu likmes vai ieguldījumu fondi, kuri savos portfeļos izvēlās riskantākus finanšu instrumentus, lai apmierinātu ienesīguma mērķus. Palielinot procentu likmi, veidojas apgrieztais efekts, nauda kļūst dārgāka, kas sekmē pieņemt mazāk riskantus lēmumus, tādējādi ierobežo ekonomikas izaugsmi.<sup>1</sup>

Finanšu pasaulē galvenais mērķis ir iegūt lielāku peļņu, uzņemoties mazāku risku, bet diemžēl reti, kad pastāv tādi ideāli apstākļi. Pieņemts uzskatīt, jo lielāks potenciāls ieguvums, jo lielāku risku uzņemas investors. Izvērtējot investīciju projektus, naudas tagadējo vai nākotnes vērtību, ienesīgumu riska pakāpi un daudzus citus faktorus, ir nepieciešams zināt procentu likmi. Viens no piemēriem, kad nepieciešams pievērst lielu uzmanību procentu likmei, ir hipotekārā kredīta saistību uzņemšanās individuāliem vai investīciju mērķiem. Samazinoties procentu likmei, investors maksā mazāk par aizņemtajiem līdzekļiem, savukārt

---

<sup>1</sup> Lian, C., Ma, Y., Wang, C. Low interest rate and risk-taking: evidence from individual investment decisions. *Oxford University Press on behalf of The Society for Financial Studies*. 2018, p.2143

ienākumi var nemainīties vai palielināties. Palielinoties procentu likmei būtiski, palielinās izdevumi, bet ienesīgums paliek tāds pats vai arī samazinās, kas var novest investoru pie bankrota sliekšņa. Šādu piemēru var attiecināt uz jebkādu investīcijas projektu, it īpaši ja projekts paredzēts uz ilgāku laiku. Nepareizi novērtējot vai nepievēršot pietiekami uzmanības procentu likmes riskam, tas var novest pie nevēlama rezultāta. No šāda riska var izvairīties izmantojot procentu likmes instrumentus, piemēram, fiksējot procentu likmi ar mijmaiņas darījumu.<sup>2</sup>

Centrālo banku rokās procentu likme ir ļoti spēcīgs rīks, kā kontrolēt ekonomiku, piemēram, ECB definējot procentu likmi, kontrolē inflāciju, ekonomikas attīstību u.t.t. Finanšu tirgū procentu likme korelē ar visa veida aktīviem. Palielinoties procentu likmei, akciju cenām jākrīt, to var paskaidrot ar naudas vērtības palielināšanos, procentu izmaksu palielināšanos un peļņas samazināšanos. Procentu likme pa tiešo ietekmē naudas pieprasījumu un piedāvājumu, kas ietekmē pārējos finanšu procesus visos līmeņos. Mainoties pieprasījumam, mainās vairāku makroekonomisku rādītāju gaidas, kas savukārt ietekmē lēmuma pieņemšanu un riska līmeni investoriem.<sup>3</sup> Izmantojot procentu likmi ir iespējams prognozēt makroekonomiskus faktorus un otrādi, zinot faktorus var prognozēt procentu likmi. Viens no piemēriem ir Teilora likums (1.1) formula, kuru izmanto centrālās bankas, lai nostādītu monetārās politikas mērķus attiecībā uz procentu likmi. Formulā tiek izmantoti makroekonomiskie faktori, tās mērķi un dabiska procentu likme.

$$i_t = r_t^* + \pi^* + 0.5(\pi_t - \pi^*) + 0.5(y_t - y_t^*), \quad (1.1)$$

kur  $i_t$  – monetārās politikas procentu likme;

$r_t^*$  - dabiska procentu likme;

$\pi_t$  – cenu inflācija;

$\pi^*$  - centrālās bankas inflācijas mērķis;

$y_t$  – produkcijas izlaide;

$y_t^*$  - potenciālā produkcijas izlaide.<sup>4</sup>

<sup>2</sup> Hemert, O.V. Household interest rate risk management. *Real estate economic*. Vol.38. 2010, p.500.

<sup>3</sup> Ratanapakorn, O., Sharma, C.S. Dynamic analysis between the US stock returns and the macroeconomic variables. *Applied Financial Economics*. 2007, p.371.

<sup>4</sup> Ajevskis, V. Dabiskā procentu likme: ar ēnu procentu likmes modeli iegūtā informācija. *Latvijas Banka*. 2018, lpp.11.

Ekonomikā viss savā starpā ir saistīts. Ir pierādīts fakts, ka negatīvi slīpa procentu likmes termiņstruktūra prognozē recesiju.<sup>5</sup> Tas parāda, ka procentu likmes termiņstruktūra satur daudz svarīgas informācijas. Ar šo instrumentu var prognozēt makroekonomiskus rādītājus, finanšu instrumentu kustības dinamiku, validēt finanšu instrumentu cenas, pieņemt lēmumus par kāda aktīva iegādi vai projekta īstenošanu, kā arī var pielietot daudzās citās finanšu sfērās lēmumu pieņemšanai.

### 1.1.1. Procentu likmes saistība ar finanšu instrumentiem

Iepriekš tika minēts, ka procentu likmes struktūru ir svarīgi zināt, lai novērtētu riskus un validēt finanšu instrumentu cenas. Vislielākā ietekme procentu likmei ir uz fiksēta ienesīguma vērtspapīriem jeb obligācijām. Palielinoties procentu likmei, obligācijas zaudē savu vērtību, līdz ar to kļūst lētākas. Matemātiski procentu likmes saistību ar obligācijas cenu var izteikt pēc formulas (1.2) Piemērā tiek piedāvāta bezkupona obligācijas cenas saistība ar procentu likmi.

$$\begin{aligned}
 P(t, T)e^{(T-t)*z(t, T)} &= 1, \\
 \ln(P(t, T)e^{(T-t)*z(t, T)}) &= 0, \\
 \ln(e^{(T-t)*z(t, T)}) &= -\ln(P(t, T)), \\
 z(t, T) &= \frac{-\ln(P(t, T))}{T-t},
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

kur P – obligācijas cena;

t - perioda sākums;

T – perioda beigas;

z – tagadējā likme, salikto procentu atdeves norma.

Svarīgs un noderīgs jēdziens procentu likmju modelēšanā ir tūlītējā procentu likme (*instantaneous interest rate*), ko bieži literatūrā apzīmē, kā  $r(t)$ . Tūlītējā procentu likmes jēdzienu var saprast, kā pieprasīta procentu likme īsā laika posmā, praktiski šī procentu likme ir līdzīga vienas dienas procentu likmei. Tūlītējā procentu likme ir teorētisks jēdziens, kas palīdz pētniekiem konstruēt modeļus un pētīt procentu likmes, kā arī atvasināto vērtspapīru uzvedību. Reālajā dzīvē tūlītējā procentu likme nepastāv. Tūlītējā procentu likme ir jēdziens, kas prasa raksturīgu diskrēta laika objektu un piešķir tam nepārtrauktību laikā, kas pētniekam

---

<sup>5</sup> Maes, K. Modeling the term structure of interest rates: where do we stand? *National Bank of Belgium*. 2004, p.28.

dod iespēju izmantot nepārtrauktus laikā parametrus, lai matemātiski aprakstīt stohastiska procesa termiņstruktūru. Formāli tūlītējo procentu likmi var novērtēt pēc (1.3) formulas.<sup>6</sup>

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} z(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} \frac{-\ln(P(t, T))}{T-t}, \quad (1.3)$$

kur  $r(t)$  – tūlītējā procentu likme.

No formulas (1.2) un (1.3) var redzēt, ka procentu likme tieši ietekmē obligācijas cenu, ka, arī zinot obligācijas cenu, un laiku līdz dzēšanai var izteikt procentu likmi.

Obligācijas nav vienīgais finanšu instruments, kas ir tieši ietekmējams no procentu likmes izmaiņām. Nākotnes līgumi (forwards and futures) ir populārs finanšu instruments, kuru izmanto ne tikai finanšu iestādes, bet arī lielas kompānijas, lai mazinātu riskus no: valūtas, procentu likmēm, produktu cenām u.c. vērtību svārstībām. Apskatot vienkāršu nākotnes līgumu uz kādu no aktīviem bez ienesīguma (1.4) formulā var redzēt, kā tiek rēķināta nākotnes līguma cena.

$$F_0 = S_0 * e^{r*t}, \quad (1.4)$$

kur  $F_0$  – nākotnes līguma cena;

$S_0$  – aktīva tūlītējā cena;

$e$  – konstante 2.71... ;

$r$  – procentu likme;

$t$  – līguma laiks.

Pēc (1.4) formulas var redzēt, ka galvenie nākotnes līguma cenas ietekmējošie faktori ir aktīva cena, laiks, uz kādu tiek noslēgts nākotnes līgums un procentu likme par kādu investori ir gatavi šo līgumu noslēgt. Tādi nākotnes līgumi dod iespēju investoram pelnīt bezrisku procentu likmi. Ja  $S_0 < F_0$ , tad investors var nopirkt aktīvu un pārdot nākotnes līgumu uz šo aktīvu, kā rezultātā peļņa ir vienāda ar  $r$ . Ja  $S_0 > F_0$ , tad investors var pārdot aktīvu un nopirkt nākotnes līgumu uz šo aktīvu, kā rezultātā peļņa atkal ir vienāda ar  $r$ . Izmantojot doto formulu iespējams izrēķināt bezrisku procentu likmi, kas uz to laika momentu par noteiktu laika intervālu tiek pieņemta investoriem kā pieņemamā. Vienīgais ierobežojums, ka dažādiem aktīviem bezrisku procentu likme var atšķirties atkarībā no paša aktīva. Kā arī paša aktīva cenu kustība ietekmē investoru uztveri par bezrisku procentu likmi noteiktam aktīvam.<sup>7</sup> Saistībā ar procentu likmi viens no izplatītākiem produktiem ir nākotnes likmes līgums (FRA – forward

<sup>6</sup> Bolder, D., J. Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation. *Bank of Canada*. 2001, p. 6.

<sup>7</sup> Hull, J.C. *Options, futures and other derivatives*. University of Toronto, 2012, p. 105. ISBN 978-0-13-216494-8.

rate agreements). FRA mērķis ir nodrošināt, ka noteikta procentu likme tiks piemērota, aizņemoties vai aizdodot noteiktu summu, noteiktā nākotnē. Šī instrumenta pieņēmums ir tāds, ka FRA likme sakrīt ar LIBOR procentu likmi. Ja veidojas starpība starp LIBOR un FRA likmi, tad pieņemts uzskatīt, ka tirgū veidojas arbitražas iespēja.<sup>8</sup> (1.5) formulā var redzēt, ka no FRA var izteikt tūlītējo procentu likmi  $r(t)$ .<sup>9</sup>

$$\begin{aligned}
 F(t, T, S) &= \frac{1}{S-T} * \left( \frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right), \\
 F(t, T) &= F(t; t, T) = \frac{1}{T-t} * \left( \frac{1}{P(t, T)} - 1 \right), \\
 R(t, T, S) &= - \frac{\log P(t, S) - \log P(t, T)}{S-T}, \\
 R(t, T) &= R(t; t, T) = - \frac{\log P(t, T)}{T-t}, \\
 f(t, T) &= \lim_{S \rightarrow T} R(t; T, S) = \frac{d \log P(t, T)}{d T}, \\
 r(t) &= f(t, t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T), \tag{1.5}
 \end{aligned}$$

Apskatot procentu likmes finanšu instrumentus, vēlējos pievērst nelielu uzmanību mijmaiņas darījumiem (swap), mijmaiņas darījumu griestiem un grīdai (cap and floor). Šie finanšu instrumenti pasargā tirgus dalībniekus no procentu likmes nevēlamām svārstībām vai dod iespēju paņemt aizdevumu izdevīgāk, nekā to piedāvā vietējas bankas. Iemesls, kāpēc tirgus dalībniekam nepieciešams zināt procentu likmes termiņstruktūras uzvedību un potenciāli prognozēt tā dinamiku, ir laicīgi izmantot iepriekš minētos instrumentus un pasargāties no nevēlamām procentu likmes svārstībām. Apzinoties, cik daudz finanšu instrumenti ir atvasināti no procentu likmes, var saprast, kāpēc tik daudz tiek pievērstas uzmanības procentu likmes izpētei. Tālāk darbā tiks apskatīts sīkāk procentu likmes termiņstruktūra un procentu likmes modeļi, lai padziļināti izprast procentu likmes uzvedību.

### 1.1.2. Procentu likmes termiņstruktūra

Viena perioda procentu likme parasti nes sevī pietiekoši maz informācijas, lai veiktu kādus secinājumus vai pieņēmumus par nākotni, tādējādi tiek izmantotas procentu likmes par vairākiem periodiem, ko sauc par procentu likmes termiņstruktūru. Pirmā problēma, kuru atrisina procentu likmes termiņstruktūras novērtēšana, ir saistīta ar obligācijas cenas izmaiņām

<sup>8</sup> Brigo, D., Mercurio, F. *Interest Rate Models – Theory and Practice*. Springer finance, 2006. ISBN 978-3-540-22149-4.

<sup>9</sup> Filipovic, D. *Term-Structure models a graduate course*. Springer Dordrecht Heidelberg London New York 2009, p.7

atkarībā no laika. Terminstruktūras likme parāda obligāciju cenas izmaiņas atkarībā no laika, tās slīpumu un izliekumu. Otrā problēma, kuru atrisina procentu likmes terminstruktūras novērtēšana, ir saistīta ar procentu likmes terminstruktūras dinamikas attīstību atkarībā no laika. Novērtējot terminstruktūras dinamiku, var prognozēt nākotnes izmaiņas procentu likmes terminstruktūras dinamikā. Zinot nākotnes izliekumu, līmeni un slīpumu var pieņemt lēmumus, kāda procentu likme būs pēc noteiktā periodā. Šī informācija savukārt dod iespējas secināt par nākotnes gaidām interesējošajās finanšu jomās.<sup>10</sup>

Procentu likmes terminstruktūras uzvedību izskaidro vairākas teorijas. Darba autors apskatīja trīs procentu likmes terminstruktūras teorijas, kuras tiek pieminētas visbiežāk, pēc autora domām. Pirmā ir gaidu teorija (expectations theory), kas paredz, ka ilgtermiņu procentu likmēm ir jābūt atspoguļotam nākotnes līgumos par īstermiņa procentu likmi. Sanāk, ja FRA likme par kādu noteiktu periodu samazinās, tad investori sagaida, ka arī īstermiņa procentu likme tajā periodā samazināsies. Otrā teorija ir tirgus segmentācijas teorija (market segmentation theory), kura paredz, ka katram procentu likmes periodam ir savi tirgus dalībnieki, kas veido savu pieprasījumu un piedāvājumu, neatkarīgi no citiem tirgus dalībniekiem citos segmentos. Piemēram, tirgus dalībnieks, kas darbojas ilgtermiņu obligāciju tirgū un definē ilgtermiņa procentu likmes piedāvājumu un pieprasījumu, neietekmē īstermiņa obligāciju tirgus un tos dalībniekus. Trešā ir likviditātes izvēles teorija (liquidity preference theory), kas paredz, ka investori izvēlas saglabāt savu likviditāti un ieguldīt līdzekļus īslaicīgi. Savukārt aizņēmēji dod priekšroku aizņemties uz ilgāku laika periodu, tas noved pie situācijas, kad ilgākam laika periodam procentu likmes ir lielākas salīdzinājumā ar īstermiņa procentu likmi. Pēc Džona C.Halla grāmatas, tiek uzskatīts, ka šī teorija ir vispievilcīgākā, lai paskaidrotu procentu likmes terminstruktūru.<sup>11</sup>

Pieņemot kādu no dotajām, teorijām var veikt pieņēmumus par nākotnes terminstruktūras uzbūvi, bet šis pieņēmums būs balstīts tikai uz kvalitatīvu pieņēmumu. Lai pieņemtu kādu lēmumu par nākotnes izmaiņām, nepieciešams zināt, kādā intervālā var svārstīties vērtības, ar kādu varbūtību kāds notikums var iestāties. Rast atbildes uz šiem un daudziem citiem jautājumiem palīdz ekonometriskā modelēšana.

---

<sup>10</sup> Bolder, D., J. Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation. *Bank of Canada*. 2001, p. 2.

<sup>11</sup> Hull, J.C. *Options, futures and other derivatives*. University of Toronto, 2012, p.94. ISBN 978-0-13-216494-8.

### 1.1.3. Modeļu nepieciešamība procentu likmes termiņstruktūras novērtēšanai

Daudzi pētnieki, kuri konstruē procentu likmes modeļus, lielākoties vēlas atrisināt noteiktus finanšu jautājumus, izprotot procentu likmes statistikas rādītājus, kā sadalījuma platumu, likmes slīpumu u.t.t.. Investors var definēt finanšu instrumentu cenas, kā arī ierobežot riskus. Zinot modeļa struktūru iespējams veidot nākotnes prognozes, kas vēlāk var tikt izmantotas spekulatīvos nolūkos vai riska ierobežošanai. Papildus tam modelējot procentu, likmi ir, iespējams, padziļinātāka izprast saistību starp procentu likmi un ekonomikas attīstības tendencēm un gaidām.

Kāpēc vispār ir nepieciešami modeļi? Modeļi ir nepieciešami, lai apvienotu ekonomikas teoriju, politiku un saimniecisko darbību, kas ir politisko lēmumu un ekonomisko teoriju atspoguļojums. Lai šos visus ķēdes posmus apvienotu, nepieciešams pielietot matemātiskas metodes, ar kuru palīdzību tiks izskaidrots katras ķēdes ietekme vienai uz otru. Pielietojot matemātiskus aprēķinus, tiek iegūts empīrisks pamatojums par kāda lēmuma pieņemšanu, kas tika izdarīts vai tiek plānots. Modeļi ir neatņemama daļa ikdienas lēmumu pieņemšanā, ar to palīdzību iespējams aprakstīt, novērtēt un prognozēt procesu norisi, kā arī to rezultātus.<sup>12</sup>

Termiņstruktūras modeļu primārā izmantošana ir procentu likmju finanšu instrumentu cenu noteikšana. Papildus tam daudzi ieskaitot centrālās bankas procentu likmes modeļus izmanto ieguldījumu stratēģiju un riska pārvaldības analīzē. Modeļi palīdz adekvāti novērtēt procentu likmju termiņstruktūru un tās stohastisko raksturu, kas palīdz adekvāti novērtēt iespējamās nākotnes izmaiņas.<sup>13</sup> Secinājumos izriet, ka modelēšana ir rīks, kas paskaidro ekonomiskās teorijas, politiku un gala rezultāta cēloņu un seku sakarības. Termiņstruktūras modelēšana palīdz adekvāti novērtēt un paskaidrot kāda lēmuma pieņemšanu saistītu ar procentu likmes vai to instrumentu izmantošanu.

## 1.2. Procentu likmes modelēšana

### 1.2.1. Stohastiskais process

Apskatoties uz procentu likmes izmaiņām kādā laika intervālā, var redzēt, ka kustībā pastāv kāda dinamika. Procentu likmes kustība nav stacionāra. Nestacionaritātes pazīmes ir

---

<sup>12</sup> Клейнер, Г.Б. Экономико-математическое моделирование и экономическая теория. *Журнал -Экономика и математические методы*, 2001, стр.8.

<sup>13</sup> Bolder, D., J. Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation. *Bank of Canada*. 2001, p. 3.

trends, cikliskums, kā arī heteroskedasticitāte. Nestacionaritāte parāda, ka laika rinda ir atkarīga no laika un iepriekšējām vērtībām. Gan stacionāru, gan nestacionāru laika rindu var definēt, kā stohastisku procesu.

Stohastisks process var būt diskrēts un nepārtraukts laikā. Sākumā tika apskatīts stohastisks process nepārtraukts laikā. Pētot procentu likmes dinamiku, tiek pieņemts uzskatīt, ka process ir Markova process, kur vēsturiskas vērtības neietekmē nākotnes vērtības, vienīgais ietekmējošais faktors ir tūlītējās vērtības. Šis pieņēmums ir, iespējams, apšaubāms, bet veidojot modeļus, tomēr pētnieki pieturas pie šī pieņēmuma. Ja stohastiskais process seko Markova pieņēmumam, tad vērtību izmaiņas ir definētas noteiktā, normāli sadalītā ticamības intervālā  $\phi(0,1)$ , kur 0 ir vidējā vērtība un 1 ir standartnovirze, tādu procesu sauc par Vinera procesu. Pirmais pieņēmums ir tāds, ka Vinera procesam vērtību izmaiņas ir normāli sadalītas  $\phi(0,1)$ . Savukārt otrs pieņēmums, vienam procesam divos dažādos laika nogriežņos Vinera process ir neatkarīgs viens no otra. Citiem vārdiem sakot, korelācija starp diviem procesiem ir 0. Vispārīgo Vinera procesu var aprakstīt pēc (1.6) formulas.

$$dx = a dt + b dz, \quad (1.6)$$

kur a un b ir konstantes.

Konstante a ir vērtības (cenas) trends, b ir vērtības volatilitāte, dz ir Vinera process. Tā kā cenas vērtība (procentu likme) vienmēr kustās un mainās, līdz ar to procesu nepieciešams aprakstīt ar funkcijām, kuras katrā laika posmā varēs ticamāk aprakstīt vērtību svārstību. Stohastisku procesu aprakstīt ar funkciju piedāvāja Ito Lemma un viņa piedāvāto formulu var redzēt (1.7) formulā.<sup>14</sup>

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz, \quad (1.7)$$

kur  $a(x, t)$  – trends atkarīgs no x un t;

$b(x, t)$  – haotiska kustība atkarīga no x un t;

x – procesa tūlītējā vērtība;

t – laiks.

Koeficients a parāda laika rindas tendenci. Ja koeficients ir pozitīvs, tad procesa vērtības tiecās augt, ja negatīvs, tad procesa vērtības tiecās samazināties. Ja trends ir 0, tad tādu procesu var saukt par martingalu vai par vispārīgu Vinera procesu.

---

<sup>14</sup> Hull, J.C. *Options, futures and other derivatives*. University of Toronto, 2012, p.286. ISBN 978-0-13-216494-8.



Nepārtraukta laika stohastiska procesa vērtības iespējams aprēķināt, pārveidojot vienādojumu parciāldiferenciālvienādojumā, kas ir pietiekoši sarežģīti. Vienkāršākais veids ir pārveidot nepārtraukta laika stohastisko procesu par diskrētu procesu. Šāds process pieprasa mazāk tehnisko prasību, tā rezultātā aprēķini ir vienkāršāki. Viena faktora diskrēta laika process seko autoregresijas procesam, vairāku faktoru diskrēta laika process seko vektoru autoregresijas procesam ar papildus balto troksni ( $\varepsilon$ ). Pēc formulas (1.12), baltais troksnis ir normāli sadalīts ar vidējo vērtību vienādu ar nulli un standartnovirzi vienādu ar viens.<sup>15</sup> Šāda īpašība arī padara pievilcīgu datu definēšanu kā diskrētu lielumu.

### 1.2.2. Pamata modeļi

Pirms sākt pētīt procentu likmes modeļus ir nepieciešams saprast, kādu informāciju pētnieks vēlas iegūt. Pastāv vairāku modeļu tipi, kas atšķiras pēc kāda sākuma nosacījuma. Sākumā izskatīsim dažus viena faktora līdzsvara modeļus. Par viena faktora procentu likmes modeļu pirmgājēju var uzskatīt Vasička modeli. Galvenā ideja modelī ir balstīta uz procentu likmes tuvināšanu vidējai vērtībai. Ja procentu likme ir tālu no vidējas vērtības, tad modeļa drifts būs negatīvs vai pozitīvs, lai nākamās procentu likmes vērtības tuvotos vidējai vērtībai ar ātrumu  $\alpha$ . (1.8) formulā ir attēlots Vasicka modelis.<sup>16</sup>

$$dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma dB_t \quad (1.8)$$

kur  $\alpha$  – dreifs;

$\beta$  – vidējā vērtība;

$r_t$  – procentu likme;

$\sigma$  – volatilitāte;

$B_t$  – Brauna kustība.

Vēl viens populārs modelis ir CIR modelis, kuru ņēma par pamatu Vasička modelim, uzlabojot Brauna kustību. CIR modelī Brauna kustība ir atkarīga no pašas procentu likmes, jo pēc formulas volatilitāte tiek reizināta ar kvadrātsakni no pašreizējās procentu likmes. Tādējādi pie lielākas procentu likmes nenoteiktība palielinās. Šī modeļa trūkums ir neiespējamās negatīvas procentu likmes vērtības, jo Brauna kustības definēšanai, procentu likmei jābūt

<sup>15</sup> Backus, D., Foresi, S., Telmer, C. Discrete - Time Models of Bond Pricing. *Salomon Smith Barney*. 1998, p.6.

<sup>16</sup> Yougfeng, Wu., Liang, X. Vasicek model with mixed-exponential jumps and its applications in finance and insurance. *Advances in Difference Equation*. 2018, p. 2.

pozitīvai. (1.9) formulā var redzēt CIR modeli, visi apzīmējumi ir tādi paši, kā izmantoti Vasicka modeļa aprakstā.<sup>17</sup>

$$dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t, \quad (1.9)$$

Izskatītie modeļi aptuveni apraksta termiņstruktūru dinamiku, bet neapraksta tieši konkrētas dienas dinamiku, kas ne vienmēr var būt pieņemams investoram. Lai labotu šo kļūdu tika piedāvāts bez arbitražas modeļi. Ho-Lii piedāvāja pirmo viena faktora bez arbitražas modeli. Šīm modelim dreifa funkcijai nav mērķis tiekties uz vidējo vērtību, bet dreifa funkcija norāda vidējo virzienu uz kurieni, iespējams, pārvietosies procentu likme definētajā laikā. (1.10) formulā var redzēt, ka dreifs ir izteikts vienkārši, kā viens faktors, kas nozīmē vidējo kustības virzienu. Viner process Ho-Lii modelī apraksta volatilitāti, kura atkarīga no laika.<sup>18</sup>

$$dr = \theta(t)dt + \sigma(t)dz, \quad (1.10)$$

kur  $\theta(t)$  – vidējais virziens, kurā procentu likme pārvietojas laikā  $t$ ;

$\sigma(t)$  – procentu likmes momentānā standartnovirze jeb volatilitāte.

Pastāv vairāki modeļi, kas izmanto pieņēmumu, ka modeļi apraksta bez arbitražas procentu likmes termiņstruktūru.

Kā iepriekš ir redzams, katra modeļa klasei ir savs uzdevums, bet pastāv arī daudzfunkcionāli modeļi, kuri labi izpilda vairākas funkcijas. Kā vienu no tādiem var uzskatīt Nelsona Sigela modeli, jo modelis ir viegli interpretējams. Šis modelis ir piemērojams dažādās situācijās, kā dinamisko ienesīguma līknes modelis laika rindas kontekstā, kā arī modeli var pielietot kopā ar makroekonomiskiem faktoriem.<sup>19</sup> Klasisko dinamisko Nelsona Sigela modeli var redzēt formulā (1.11).

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t} \right) + \beta_2 \left( \frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t} - e^{-\gamma t} \right), \quad (1.11)$$

kur  $\tau$  – laiks līdz termiņam;

$\beta_n$  – parametrs;

$r_t$  – procentu likme;

$\gamma$  – riska parametrs.

<sup>17</sup> Tarelli, A. No-arbitrage one-factor term structure models in zero- or negative-lower-bound environments. *Investment Management and Financial Innovations*. Vol.17. 2020, p.200.

<sup>18</sup> Subrahmanyam, M. G. The Term Structure of Interest Rates: Alternative Approaches and Their Implications for the Valuation of Contingent Claims. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*. 1996, p.22.

<sup>19</sup> Krippner, L. The Derivation and Application of a Theoretically and Economically Consistent Version of the Nelson and Siegel Class of Yield Curve Models. *Waikato. Researchgateway*. 2007, p.6.

Katrs beta koeficients dod noteiktu informāciju. Pirmais koeficients parāda procentu likmes līmeni, otrais koeficients slīpumu, trešais koeficients izliekumu. Šos faktoros ir viegli interpretēt, tāpēc šis modelis ir pietiekoši populārs gan starp akadēmiķiem, gan starp praktiķiem. Šim autoram pastāv arī interpolācijas modelis, kur ar optimizācijas metodi tiek atrasti optimāli punkti, kas vislabāk apraksta termiņstruktūras formu konkrētajā laika periodā.

Bet arī šiem modeļiem ir savi trūkumi. Pirmais trūkums – ne visiem modeļiem var definēt vairākus faktoros. Līdz ar to modelis nav spējīgs aprakstīt visu termiņstruktūru pilnīgi. Otrs trūkums – modeļi neatļauj pētniekam izvēlēties volatilitātes struktūru, jo vairāku modeļu pamatā volatilitāte ir konstanta, kas neatbilst reālam tirgum. Papildus populārākie modeļi ir Heath-Džerov-Morton (HJM) un Libor tirgus modelis (LMM). Šie modeļi tiek izmantoti pārsvarā atvasināto procentu likmes vērtspapīru cenas novērtēšanai. Līdz ar to šajā darbā netiks izskatīti šāda veida modeļi, jo šī darba mērķis nav saistīts ar atvasināto vērtspapīru cenu novērtēšanu.

### **1.2.3. Vairāku faktoru modeļi**

Iepriekš tika izskatīti vairāki modeļi, kas ņem vērā dažādus pieņēmumus un ir domāti dažādiem mērķiem. Tagad tiks izskatīti vairāku faktoru modeļi, to pielietošana praksē un ieguvums no faktoru skaita palielināšanās. Tā kā darba uzdevums ir apskatīt vairāku valstu procentu likmes un saprast to termiņstruktūru, nākotnes tendences u.t.t., tad ir nepieciešami līdzsvara modeļi, jo rezultātā nepieciešams iegūt vispārīgu informāciju par procentu likmes termiņstruktūru.

Konstruējot vairāku faktoru procentu likmi par pamatu ņem kādu no iepriekš pieminētajiem viena faktora modeļiem. K. Ben Nowman apskatot un salīdzinot viena, divu un trīs faktoru modeļus savā starpā uz Japānas procentu likmes, secināja, ka divu un trīs faktoru modeļi strādā labāk nekā viena faktora modelis. Pētījumā tika izmantotas 3 mēnešu un 1,5,7,10,15,20,30 gadu procentu likmes par periodu no 2000. līdz 2010. gadam, kuru intervāls ir viens mēnesis. Pētnieks izmantoja vispārinātu Vasicka modeli, protams, ar saviem uzlabojumiem. Galvenais pilnveidojums attiecās uz Brauna kustību, kur pētnieks uzskatīja, ka katra veida ziņas ietekmē un ir korelētas ar procentu likmes izmaiņām. Tādā veidā ieviešot vairākus faktoros procentu likmes novērtēšanai un prognozēšanai. Pētījumā tika apskatīta novērtētās procentu likmes kļūda no reālas procentu likmes. Pētnieks secināja, ka starp divu un

trīs faktoru modeļu rezultātiem kļūdas ir ļoti mazas, līdz ar to divu faktoru modeļa konstruēšana ir pietiekama, lai novērtētu procentu likmi.<sup>20</sup>

Ren-Rav Chen un Louis Scott savā pētījumā salīdzināja vairāku faktoru procentu likmes modeļus uz CIR modeļa bāzes. Fiksētas vērtības viena, divu un trīs faktoru modeļos novērtēja ar maksimālās ticamības novērtējumu, izmantojot Kalman filtru un pielietojot Amerikas obligāciju tirgus datiem. Darbā tika veikti autoru pieņēmumi, kā rēķināt nepieciešamos koeficientus, piemēram, vidējo atgriešanas ātrumu rēķināt kā vidējo pusperiodu. Ren-Rav Chen un Louis Scott savā darbā secināja, ka trīs faktoru modelis vislabāk apraksta procentu likmi, bet arī divu faktoru modelis ir pietiekoši labs, lai aprakstītu procentu likmes kustību. Ticamības novērtējums gan divu, gan trīs faktoru modeļiem bija diezgan tuvu, salīdzinot ar viena faktora modeli.<sup>21</sup>

Apskatot bez arbitražas daudz faktoru modeļus, tika apskatīts vairāku faktoru piedāvātais modelis. Par pamatu tika izmantots Hul-Vaita modelis. Galvenais secinājums, ko izdarīja pētnieks, jo vairāk faktoru ir, jo labāk modelis novērtē procentu likmi. Starp viena un divu faktoru modeļu precizitāti bija jūtama atšķirība, novērtējot modeli, bet starp divu un trīs faktoru modeļiem šī starpība bija niecīga. Palielinoties faktoru skaitam, precizitāte palielinājās, bet atšķirība no iepriekšējā modeļa samazinājās. Līdz ar to pētnieks secināja, ka ar divu faktoru modeli varētu būt pietiekami, lai precīzi novērtētu procentu likmi.<sup>22</sup>

Iegūtie faktori ir reprezentatīvi un nes sevī kādu informāciju. Piemēram, Nelsona Siegela modelī pirmie trīs faktori norāda tādu informāciju, kā līmenis, slīpums un izliekums. Līmenis bieži vien sakrīt ar desmit gadīgas procentu likmes kustību un norāda uz potenciālo nākotnes līmeni, uz kuriem attīstīsies īsā procentu likme. Slīpums parāda starpību starp īstermiņa un ilgtermiņa procentu likmi, jo mazāka starpība, jo plakanāka termiņstruktūra. Izliekums no vārda definīcijas parāda obligācijas cenas attīstības izliekumu vai procentu likme gaidas visos periodos. Katrs no šiem parametriem dod noteiktu informāciju arī par nākotnes termiņstruktūras formu, kas ir ļoti noderīga informācija gan pētniekam, gan praktiķim.<sup>23</sup>

---

<sup>20</sup>Nowman, K. B. Estimation of one-, two- and three-factor generalized Vasicek term structure models for Japanese interest rates using monthly panel data. *Applied Financial Economics*. 2011, p. 1070.

<sup>21</sup>Ren-Raw, C., Louis, S. Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure: Estimates and Tests From a Kalman Filter Model. *Journal of Real Estate Finance and Economics*. Vol. 27. 2003, p.11.

<sup>22</sup>Blanchard A. The Two-Factor Hull-White Model : Pricing and Calibration of Interest Rates Derivatives. [viewed 2 October 2020]. Available at: <https://www.math.kth.se/matstat/seminarier/reports/M-exjobb12/120220b.pdf>

<sup>23</sup>Rudebush, G.D., Diebold, F.X., Christensen, H.E. The affine arbitrage-free class of Nelson-Siegel term structure models. *Federal Reserve Bank of San Francisco*. 2007, p.2.

Izmantojot modeļos makroekonomiskus faktoros, var iegūt informāciju par katra faktora ietekmi uz procentu likmes struktūrā.

Pētot literatūru, var iegūt priekšstatu, cik daudz faktori ir optimāli izmantoti, pielietojot kādu noteikti metodi. Cita pieeja ir izmantot galveno komponentu analīzi, kas jau uz iegūtiem datiem var parādīt, cik komponentu ir nepieciešams, lai paskaidrotu kādu datu kopu. Galveno komponentu analīzi var izskaidrot ar lineāras algebras palīdzību, kur dati tiek saspiesti ar matricu pārveidojumiem. Rezultātā ir daudz datu mākoņi, kuri kādā veida korelē savā starpā. Šādos mākoņos tiek projicēti vektori, kuri atrod lineāras likumsakarības starp mainīgajiem. Ja pirmais vektors spēj paskaidrot, pieņemsim, 90% no datiem, tad tiek uzskatīts, ka pirmais faktors paskaidro 90%.<sup>24</sup>

Secinot par papildu faktoru nepieciešamību, rodas viennozīmīga atbilde, jo vairāk faktoru, jo precīzāk tiks aprakstīta procentu likmes termiņstruktūra. Toties vienmēr jāpatur galvā, ka pārāk liels faktoru skaits rada pārspīlējumu (overfitting), ka arī sarežģītā aprēķinus un rezultātu interpretāciju. Šajā darbā tiks pielietoti divu nenovērojamo faktoru modeļi, jo rezultāti ir pietiekoši precīzi, vieglāk interpretējami un vienkāršāk rēķināmi.

#### **1.2.4. Affines modeļi**

Aprakstot procentu likmes dinamiku pētniekam sākumā nepieciešams izveidot tūlītējo procentu likmi, lai no tās iegūtu informāciju par procenta likmi dažādos laika intervālos. Affines modeļi dod iespēju atrast tās unikālās vērtības, ar kuru palīdzību iespējams iegūt bezkupona obligācijas cenas funkciju. Affine termiņstruktūras modeļi ir modeļi, kur nepārtraukti saliktā tūlītējā likme ir affīnes funkcija īsai likmei  $r(t)$ . Šis modelis ir lineārs parciāldiferenciālvienādojums, kas ir konstruēts, pieņemot, ka obligāciju cenas funkcija ir lineāra funkcija no pamatā esošā stāvokļa mainīgajiem, kas savukārt nodrošina modeļa nenoteiktību. Kas ir tālu no realitātes, jo praksē pētnieki secina, ka pārtaisot lineāru modeli par nelineāru modeli, tā rezultātā var labāk aprakstīt obligācijas cenas funkciju. Pētnieki izmanto tieši šos modeļus, jo tajos ir minimāls raksturlielumu kopas lielums, kā arī ir viegli interpretēt to nozīmi.<sup>25</sup>

Iepriekš apskatītie modeļi Vasička un CIR ir tā saucamie affīnes modeļi, bet pastāv modeļi, kurus neiespējams pārveidot, ka, piemēram, Dothan modeļi. Affīnes modeļi iespējams konstruēt arī diskrētā laika tūlītējai procentu likmei. Diskrētā laika tūlītējā procentu likme seko

---

<sup>24</sup> Ringner, M. What is principal component analysis? *Nature publishing group*. Vol.26. 2008, p.303.

<sup>25</sup> Bolder, D. J. Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation. Bank of Canada. 2001, p.4

pirmās pakāpes autoregresijas procesam ar papildus balto troksni ( $\varepsilon$ ), pēc formulas (1.12), kas ir normāli sadalīts ar vidējo vērtību 0 un standartnovirzi 1.

$$z_{t+1} = z_t + (1 - \varphi) * (\theta - z_t) + \sigma * \varepsilon_{t+1}, \quad (1.12)$$

Parametrs phi ( $\varphi$ ) kontrolē tendenci atgriezties uz vidējo vērtību, ja phi ir 1, tad  $z_t$  seko nejaušai kustībai, bez tendences uz atgriešanos uz vidējo vērtību. Ja phi ir no 0 līdz 1, tad spot likmei ir tendence atgriezties ar ātrumu  $\theta$  uz vidējo vērtību. Papildus visam tiek ieviests papildus konstante lamda ( $\lambda$ ), kas apzīmē riska cenu. Ja lamda ir pozitīva, tad procentu likmes termiņstruktūra slīpums ir lejupslīdošs trends un pie negatīvas lamdas slīpums ir augšupvērstš. Affines modeļi ietver vairāk nekā tikai autoregresijas procesu, lai aprēķinātu procentu likmes ienesīgumu, nepieciešams ieviest konstantes, kas apraksta obligāciju cenu veidošanos pēc formulas (1.13).

$$B(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T) * r(t)},$$

Kā arī tiek pieņemts, ka  $A_0 = B_0 = 0$  un  $A_1 = 0$  un  $B_1 = 1$ , tad

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + \delta + B_n(1 - \varphi)\theta - (\lambda + B_n)^2 / 2, \\ B_{n+1} &= 1 + B_n\varphi, \end{aligned} \quad (1.13)$$

Phi un theta konstantes iespējams izrēķināt analītiski vai izmantojot optimizācijas metodes.<sup>26</sup>

CIR modeli iespējams interpretēt līdzīgi, izvirzot līdzīgus pieņēmumus. Bet analītiskais risinājums ir mazliet komplicētāks salīdzinājumā ar Vasička modeli. Pēc līdzīgiem pieņēmumiem var konstruēt vairāku faktoru affines modeli, lai labāk aprakstītu procentu likmes ienesīgumu. Process ir sarežģītāks, bet rezultāts, pēc Backus D., raksta ir jūtami precīzāks.

Nepārtrauktā laikā Vasička modelim piemīt sekojoša affines modeļa struktūra. Tiek veidots parciāldiferenciālvienādojums, izmantojot Teilora pirmos koeficientus, un tas izskatās sekojoši, skat., (1.14) formulu.

$$dP(t, r, T) = \left( P_t + fP_r + \frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr} \right) dt + dP_r dw(t), \quad (1.14)$$

Kur veicot pārveidojumus un izteicot iepriekš minēto vienādojumu, affines formā sanāk (1.15) formula.

$$-A'_t(\tau) - k(\theta)B(\tau) + \frac{\sigma^2}{2}B(\tau)^2 - (1 - B'_t(\tau) - kB(\tau))r = 0,$$

kur ir spēkā sistēma:

<sup>26</sup> Backus D., Foresi S., Telmer C. Discrete - Time Models of Bond Pricing. *Salomon Smith Barney*. 1998, p.6.

$$B'_t(\tau) + kB(\tau) = 1 \text{ un } B(0) = 0, \text{ ka arī}$$

$$-A'_t(\tau) - k(\theta)B(\tau) + \frac{\sigma^2}{2}B(\tau)^2 = 0 \text{ un } A(0) = 0,$$

kur A un B aprēķina pēc formulām

$$B(\tau) = \frac{1}{k}(1 - e^{-kt}),$$

$$A(\tau) = \frac{\gamma(B(\tau)-\tau)}{k^2} - \frac{\sigma^2 B(\tau)^2}{4k},$$

$$\text{kur } \gamma = k^2\left(\theta - \frac{\sigma\lambda}{k}\right), \quad (1.15)$$

Atrisinot šādus vienādojumus iespējams atrast unikālās vērtības procentu likmei katrā laika periodā.<sup>27</sup>

Pēc iepriekš apskatītām formulām var secināt, ka pētnieks var diezgan elastīgi izmantot affines modeļus un aprēķināt gan diskrēta, gan nepārtrauktā laikā procentu likmes termiņstruktūru, gan tās ienesīgumu. Modeļu koeficienti ir samērā viegli iegūstami un interpretējami, kas ir svarīgs aspekts praktiķiem. Palielinoties nenovērojamo faktoru skaitam, affines modeļu struktūra kļūst vairāk komplicētāka un sarežģītāka. Vairāku faktoru modeļu koeficientu aprēķiniem jāpielieto sarežģītākas pieejas. Šajā darbā galvenokārt tiks izmantots Kalmana filtrs un maksimālas ticamības novērtēšanas metode, kas tiks apskatīta 1.3 nodaļā.

### 1.2.5. Ēnu procentu likme

Iepriekš apskatītie modeļi veiksmīgi strādā un ir pierādījuši sevi praksē, kad procentu likme ir pietiekoši tālu no 0 un negatīvam vērtībām. Bet mūsdienu realitātē ir tāda, ka Japānas procentu likme ilgu laiku ir uz tā saucamās “zemākas nulles robežas”, vairākas Eiropas Savienības valstis un ECB procentu likme ir tuvu 0, vai pat negatīva. Zema procentu likme ir Centrālo banku instruments, kas mēģina stimulēt ekonomiku, bet tajā pastāv zemākā robeža. Kad tiek piedāvāta negatīva atdeve par aktīvu glabāšanu, investoram nepieciešams veikt opcijas izvēli vai līdzekļus ieguldīt vai turēt valūtā, kā fizisku aktīvu.<sup>28</sup> Tāpēc tika uzskatīts, ka procentu likmes un līdz ar to arī parastā monetārā politika tika ierobežota ar nulles zemāko robežu.

Šajos apstākļos parastie modeļi ir maz efektīvi, jo bieži modeļa rezultāti ir neadekvāti un nesatur pietiekami noderīgas informācijas. Parastais lineārais modelis viegli ieiet zem nulles robežas, kas šajā gadījumā neatspoguļo reālo situāciju. Kā arī, stimulējot ekonomikas izaugsmi,

<sup>27</sup> Bolder, D. J. Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation. *Bank of Canada*. 2001, p.14

<sup>28</sup> Krippner L., *Zero lower bound term structure modeling. A practitioner's guide*. Palgrave Macmillan. 2015, p.36. ISBN 978-1-349-68123-5.

Centrālā banka ir ieinteresēta veicināt arī ilgtermiņa aizņēmumiem zemu procentu likmi, kas ir tuvu nulles robežai. Rezultātā veidojas plakana procentu likmes termiņstruktūra, kurā ir maz informācijas pētņiekiem, lai novērtētu monetāro politiku. Kā risinājums šai problēmai tika piedāvāta ēnu procentu likme.

Ēnu likmes modeļi piedāvā risinājumu tādā nozīmē, ka no vienas puses Gausa difūzijas process “ēnas” īsajai likmei var brīvi pieņemt negatīvas vērtības, kamēr no otras puses, “ZLB” īsās ātruma difūzijas procesu ierobežos “apakšējā robeža”. Šī attīstība ir būtiska, jo vairs nav modeļa nepareizas specifikācijas attiecībā pret novēroto tirgus ienesīguma līkni un tajā pašā laikā īsa ēnu procentu likme var iegūt negatīvas vērtības. Un pēc īsās ēnu procentu likmes dinamikas var novērtēt nestandarta monetārās politikas ietekmi uz ekonomiku.<sup>29</sup>

Šajā darbā tiks izmantoti četri ēnu procentu likmes modeļi no trim dažādiem autoriem. Divi modeļi tiek balstīti tikai uz nenovērojamajiem faktoriem, un vēl divi modeļi tiek savienoti kopā ar novērojamiem faktoriem, kas šajā gadījumā ir makroekonomiskie rādītāji. Pirmais pieņēmums, kas tiek izvirzīts veidojot ēnu procentu likmi, īstermiņa faktiskā procentu likme ir maksimālā procentu likme ēnas likme  $s_t$  un apakšējā robeža  $r$ , kas tiek izteikts vienādojumā (1.16). Rezultātā pie pozitīvām vērtībām ēnu procentu likmes termiņstruktūrai jāsakrīt ar īstermiņa procentu likmi, bet, kad procentu likme ir pie nulles robežas, tad ēnu procentu likme var pieņemt negatīvas vērtības.

$$r_t = \max(r, s_t), \quad (1.16)$$

kur  $r$  – īstermiņa procentu likme.

Pirmais autors, kura modeļi tika izmantoti, ir V. Ajevskis. Šajā darbā tika izmantoti divi šī autora modeļi. Pirmais modelis ir ar diviem makro faktoriem un ar diviem nenovērojamajiem faktoriem. Otrais modelis ir ar diviem nenovērojamajiem faktoriem. Zemāk ir aprakstīta vispārīga modeļu uzbūve. Paša ēnas procentu likme izteikta ar vienādojumu (1.17).

$$s_t = \delta_0 + \delta_1 X_t^1 + \dots + \delta_n X_t^n,$$

kur  $X_t$  ir nenovērojamais faktors, kas seko pirmās kārtas vektoru autoregresijas procesam reālajā vidē.

$$X_{t+1}^1 = (I - \Phi^p)\mu^p + \Phi^p X_t^1 + \Sigma_{\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+1}} \sim N(0, I_N),$$

kur  $I$  – vienību matrica;

<sup>29</sup> McCoy, E., Clemens, U. A Calibration of the Shadow Rate to the Euro Area Using Genetic Algorithms. *European Economy Discussion Papers*. 2017, p.4.



$\Phi$  – diagonāles matrica;

$\Sigma$  – apakšējā trijstūru matrica.

Faktoru nosacītas, cerība tiek rēķināta, ka

$$E_t^Q X_{t+i}^1 = (1 - (\Phi^p)^i) \mu^p + (\Phi^p)^i X_t^1,$$

Pie šādiem nosacījumiem sagaidāmo īstermiņa procentu liki izsaka, ka

$$E_t[r_{t+1}] = E_t[\max(0, s_{t+1})] = \mu_{t,t+1} \Phi\left(\frac{\mu_{t,t+1}}{\sigma_{t,t+1}}\right) + \sigma_{t,t+1} \phi\left(\frac{\sigma_{t,t+1}}{\mu_{t,t+1}}\right), \quad (1.17)$$

kur  $\Phi()$  apzīmē kumulatīvo normālā sadalījuma funkciju;

$\phi()$  ir normālā sadalījuma funkcija.

Šī sadalījuma ietekmē arī veidojas ēnu procentu likme un nelinearitāte. Apakšējās robežas ietekmē modelis zaudē affīnes struktūru un tiek attēlota ar nelineāru kartēšanu. Lai sīkāk iepazīties ar izmantojamo modeli var apskatīt pirmavotu, kas pieejams Latvijas bankas mājaslapā.<sup>30</sup>

Otrais autors, kura modeli izmantoja darba autors, ir L. Krippners. Tika izmantots šī autora K-ANSM(2) modelis ar diviem nenovērojamiem faktoriem. Ar pilnu modeļa aprakstu var iepazīties viņa grāmatā “Zero lower bound term structure modeling. A practitioner’s guide”. Kā arī R koda konstruēšanai tika izmantoti par pamatu šī autora Matlab programmas kodi, kuri pieejami oficiālajā Jaunzēlandes centrālās bankas mājaslapā. Divu faktoru L. Krippnera modelis satur divus faktorus. Pirmais faktors ir līmenis, kas parāda īstermiņa procentu likmes gaidas nākotnē. Otrais faktors ir slīpums, kas parāda ienesīguma likmes slīpumu. Iegūstot ar optimizācijas metodi nepieciešamos faktorus, kas apraksta ienesīguma likmes kustību, tiek iegūti parametri, kas dod vairāk informācijas par procentu likmes termiņstruktūru. Viens no šādiem iegūstamiem koeficientiem ir vidējais atgriešanas ātrums uz vidējo vērtību. Zinot šīs visas vērtību, ir iespēja aprēķināt ēnu procentu likmes kustības laiku līdz zemākai robežai. Ēnu procentu likmei palielinoties un sasniedzot zemāko robežu, nozīmē, ka ekonomikai ir stabila izaugsme, kurai nav nepieciešama papildus centrālās bankas stimulēšana, bet otrādi nepieciešams uzturēt ekonomiku robežās. Ja ēnu procentu likme ir zem zemākās robežas, tad, lai aprēķinātu sagaidāmo laiku līdz zemākai robežai jāpielieto formula (1.18).

$$\tau_0 = -\frac{1}{\varphi} \log\left[-\frac{L(t)}{S(t)}\right], \quad (1.18)$$

---

<sup>30</sup> Ajevskis, V. A term structure of interest rates model with zero lower bound and the european central bank’s non-standard monetary policy measures. *Latvijas banka*. 2016, p.7.

kur  $\tau_0$  – sagaidāmais laiks līdz zemākai robežai;

$\varphi$  – atgriešanas ātrums uz vidējo vērtību;

$L(t)$  – līmenis;

$S(t)$  – slīpums.

Izmantojot iepriekš minētos parametrus papildus, ir iespējams novērtēt monetārās politikas stimulēšanu. Šo mērījumu izsaka procentuāli. Priekš divu faktoru modeļa var aprēķināt pēc formulas (1.19), ja ēnu procentu likme ir zem zemākas robežas.

$$EMS = L(t)\tau_0 - S(t)\frac{1}{\varphi}\exp(-\varphi\tau_0), \quad (1.19)$$

Ja ēnu procentu likme ir virs zemākās robežas, tad pielieto formulu (1.20).

$$EMS = -S(t)\frac{1}{\varphi}, \quad (1.20)$$

kur EMS – efektīva monetārā stimulēšana.

Pēc šīm formulām var iegūt priekšstatu par monetārās ekonomikas stimulēšanas līmeni, kas Krippnera grāmatā parāda arī likumsakarību starp daudziem makroekonomiskiem faktoriem.<sup>31</sup>

Trešais autors, kura modelis tika pielietots, ir M.D.Bauers un G.D. Rudebušs. Šajā darbā tika izmantots šo autoru makro faktora modelis, kas tika veidots no diviem makro faktoriem un diviem nenovērojamiem faktoriem. Modeļa ideja un apraksts ir pieejams vienā no šo autoru publikācijām “Monetary Policy Expectations at the Zero Lower Bound”. Autoru R kodi tika minimāli pārtaisīti un papildināti pēc šī darba nepieciešamības.<sup>32</sup>

Darba autors secina, ka visu iepriekš pieminēto modeļu kopīgais pieņēmums ir: procentu likmes faktori seko vektoru autoregressijas procesam. Kā arī papildus kopīga īpašība visiem iepriekš minētiem modeļiem ir affines termiņstruktūra. Zinot procentu likmes affines termiņstruktūru, ir diezgan vienkārši prognozēt iespējamo nākotnes ienesīguma likmi, pēc ēnu procentu likmes prognozes.

### 1.2.6. Makroekonomiskie faktori

Procentu likme ir cieši saistīta un pat ir daļa no makroekonomikas. Sadaļā par procentu likmes būtību tika paskaidrota procentu likmes nozīme visas ekonomikas procesos. Centrālās bankas izmanto procentu likmi, lai stimulētu vai ierobežotu ekonomiku un sasniegt savus mērķus. Tā kā viss ir savā starpā saistīts, tad labākai ekonomikas novērtēšanai, un

---

<sup>31</sup> Krippner L., *Zero lower bound term structure modeling. A practitioner's guide*. Palgrave Macmillan. 2015, p.36. ISBN 978-1-349-68123-5.

<sup>32</sup> Bauer, M.D., Rudebush, G.D. Monetary policy expectations at the zero lower bound. *Federal Reserves Bank of San Francisco*. 2015, p.13.

prognozēšanai, bieži vien, izmanto vairākus mainīgos, lai iegūtu precīzāku novērtējumu vai prognozi. Procentu likmes termiņstruktūras novērtēšana arī nav izņēmums. Viens no variantiem ir izmantot autoregresiju un novērtēt procentu likmes kustību, izmantojot savas vēsturiskas svārstības, bet tiek uzskatīts, ka šī informācija ir ļoti ierobežota. Otrs variants ir pielietot papildus mainīgos un izveidot vektoru autoregresiju, kur novērtējums tiek veikts nenovērojamiem un novērojamiem faktoriem, kas bieži vien ir makroekonomiskie rādītāji, kā inflācija, IKP u.t.t. Šajā gadījumā arī novērtējot procentu likmi, var prognozēt nākotnes makroekonomisko datu izmaiņas, tikai jāņem vērā, ka pie zemākās nulles robežas jāizmanto ēnu procentu likmi, jo faktiskā procentu likme dod pārāk maz informācijas. Fan Dora Hia un Jing Cunthia Vu 2014. gada pētījumā par makroekonomisko rādītāju ietekmi uz monetāro politiku pie nulles robežas parāda, ka ēnu procentu likme termiņstruktūras modelī piedāvā pietiekami daudz informācijas un var izmantot, lai apkopotu netradicionālās monetārās politikas makroekonomiskās sekas pie nulles robežas.<sup>33</sup> Šī darba ietvaros varēsime apskatīties cik daudz informācijas dod dažādu valstu ēnu procentu likmes termiņstruktūra par ekonomikas stāvokli.

Darba autors secina, ka analizējot vairākas publikācijas galvenokārt tiek izmantoti tādi makroekonomiskie rādītāji, kā IKP, bezdarba līmenis, inflācija. Katrs no šiem rādītājiem parāda, cik stabila ir ekonomika vai notiek izaugsme vai lejupslīde. Stimulējot ekonomiku centrālās bankas, pievērš lielāku uzmanību tieši šiem rādītājiem, jo ar šiem dažiem rādītājiem var diezgan precīzi novērtēt esošo situāciju. Prognozējot makroekonomisko rādītāju nākotnes vērtības, var saprast, vai nepieciešams papildus stimuli vai ierobežojumi, lai ekonomika būtu stabila.

Analizējot pētījumu, ko veica Eiropas Komisija, par Eiro zonas valdības obligāciju starpību finanšu krīzes laikā, daba autors saskata vairākus interesantus faktus. Obligācijas vērtību nozīmīgākie makro faktori, kam ir lielāka ietekme uz obligācijas cenu, ir valsts kredītreitings, iekšējais parāds, ekonomiska stabilitāte un obligāciju likviditāte. Pētījumā tika parādīta likumsakarība starp pieaugošu parādu un obligācijas cenas samazināšanos, kas nozīmē procentu likmes pieaugumu. Kā arī tika parādīts, kā likviditāte ietekmē obligācijas svārstīgumu, ekonomiskās situācijas izmaiņu laikā.<sup>34</sup> Līdz ar to ņemot vērā iepriekšēji

---

<sup>33</sup> Cynthia, J. W., Dora, F. X. Measuring the Macroeconomic Impact of Monetary Policy at the Zero Lower Bound. *Working Paper No. 13-77*. 2014, p. 23.

<sup>34</sup> Barrios, S., Iversen, P., Magdalena Lewandowska, Ralph Setzer. Determinants of intra-euro area government bond spreads during the financial crisis. Available: *European Commission*. 2009, p.9.

analizēto, informācija var secināt, ka, novērtējot procentu likmi un veicot tās prognozi, ir iespējams veikt pieņēmumus par nākotnes ekonomisko situāciju, vērtspapīru cenām u.t.t. Procentu likme ir universāls instruments, kas dod iespēju sekot nākotnes tendencēm un notikumiem. Zinot iespējamās likumsakarības var veikt dažādu scenāriju veidošanu un, pieņemtu, lielākā daļa no scenārijiem būs pareiza.

### 1.3. Modeļu parametru novērtēšanas ar ekonometriskām metodēm

Matemātika ir ļoti plaša un katram modelim ir savas metodes, ar kurām iespējams atrast savu optimālu pieeju, kā ātrāk un precīzāk iegūt rezultātu. Apskatot iepriekš minēto literatūru, tika secināts, ka nevar iegūt precīzu atrisinājumu modeļa parametriem, novērtējot procentu likmes termiņstruktūru. Katram modelim ir sava rezultāta precizitāte, kas ir atkarīgs no pielietotās metodes. Šī darba ietvaros tiks izskatītas divas metodes, kuras arī tiek pielietotas kombinētā stilā. Pirmā metode ir Kalmana filtrs, savukārt otrā metode ir maksimālas ticamības novērtēšana.

#### 1.3.1. Kalmana Filtrs

Kalmana filtrs ir matemātisko vienādojumu kopums, kas ievieš rekursīvu procedūru stāvokļa vektora optimālai novērtēšanai laika momentā  $t$ . Tas dod optimālu stāvokļa vektoru, samazinot katrā iterācijā novērtēšanas kļūdas kovariācijas matricu, rezultātā starpība starp reāliem datiem un novērtētiem datiem kļūst mazāka. Lai pielietotu Kalmana filtru nepieciešams, definēt stāvokļa telpas formu, kas satur sevī mērījuma un pārejas vienādojumu. Jāpiebilst, ka parastais Kalmana filtrs ir lineāro vienādojumu sistēma, gadījumā, ja rodas nelineāritāte, nepieciešams nelineāritāti pārveidot par lineāru modeli vai pielietot paplašināto Kalman filtru. Kad ir definēti mērījuma un pārejas vienādojumi, tad var pielietot Kalman filtru. Izmantojot šo pieeju, nevar aizmirst par pieņēmumiem, kuriem jāseko, izmantojot Kalman filtru. Mērījuma kļūdas ir nekorelētas savā starpā, normāli sadalīti ar vidējo vērtību nulle un dispersiju, kas vienāda ar kovariācijas matricu. Procesa troksnis ir nekorelēts, normāli sadalīts ar vidējo vērtību nulle un dispersiju, kura ir vienāda ar trokšņa kovariācijas matricu.<sup>35</sup>

$$z_{t+1} = A + Hy_{t+1} + v_{t+1}, \quad (1.21)$$

kur  $z_t$  –īsā procentu likme vai ēnu procentu likme;

$A$  un  $H$  – no affīnes struktūras koeficienti;

<sup>35</sup> Vo, L.H. Application of Kalman Filter on Modelling Interest Rates. *Journal of Management Sciences*. V.1. 2014, p.5.

$y_{t+1}$ - prognozētie nenovērojamie faktori;

$v_{t+1}$ - kļūda, kas ir diagonāles matrica.

$$y_{t+1} = C + Fy_t + \varepsilon_t, \quad (1.22)$$

kur  $C$  un  $F$  ir vienādojumi matricu veidā, kas satur nepieciešamos parametrus;

$y_t$  – nenovērojamie faktori;

$\varepsilon_t$  – kļūdas matrica.

Kalman filtra izmantošana procentu likmes affīnes termiņstruktūras modeļos ieguva popularitāti pēc Duan un Simonato (1995.), Babbs un Novmana (1999.) un vēl dažu autoru darbu publikācijām. Šī pieeja ir ļoti efektīva situācijā, kad pamata stāvokļa mainīgie nav novērojami. Šeit rodas jautājums, kā tad iespējams iegūt ticamus rezultātus, ja galvenie faktori nav novērojami? Uz šo jautājumu var atbildēt paskaidrojot Kalman filtra darbības principu. Pirmais vienādojums (1.21) – mērījuma vienādojums, atspoguļo saistības starp tirgus nulles kuponu likmi un stāvokļa mainīgajiem. Šis vienādojums ir klasiskais affīnes vienādojums. Otrais vienādojums ir pārejas stāvokļa vienādojums (1.22), kas ir nenovērojams. Šis vienādojums apraksta stāvokļa mainīgo dinamiku. Kopā mērījums un pārejas vienādojumi atspoguļo tā saukto modeļa stāvokļa un telpas formu. Kad Kalmana filtrs ir definēts stāvokļa un telpu formā, tad tiek definēta sākuma nenovērojamie faktori un tad sākas rekursīva procedūra, kur galvenais mērķis ir atrast tuvākos nenovērojamus faktoros.<sup>36</sup> Novērtējot procentu likmes termiņstruktūru pēc noteikta modeļa nepieciešams ne tikai atrast nenovērojamus faktoros, bet arī koeficientus. Kā piemēram pielietojot Vasička modeli, nepieciešams atrast vidējo atgriešanas ātrumu, volatilitāti un vidējo vērtību, pie tam palielinoties faktoru skaitam, palielināsies arī koeficientu skaits. To ir iespējams izdarīt definējot optimizācijas uzdevumu, parasti literatūrā kopā ar Kalmana filtru tiek izmantota maksimālas ticamības novērtēšana.

### 1.3.2. Maksimālās ticamības novērtēšana

Kalmana filtrs sniedz mums informāciju par aptuveno nenovērojamo mainīgo vērtībām un to dinamiku, savukārt Kalmana filtrs nedod nekādu informāciju par modeļa parametriem. Lai atrastu modeļa parametrus, ir nepieciešams pielietot maksimālās ticamības novērtēšanas metodi. Darbojoties ar jebkādu metodi, ir nepieciešams izvirzīt kādus pieņēmumus. Maksimālās ticamības novērtēšanas metodei nepieciešams izvirzīt sadalījuma veidu, kas šī

---

<sup>36</sup> Bolder, D. J. Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation. *Bank of Canada*. 2001, p.26.

darba ietvaros ir normālais sadalījums ar vidējo vērtību un dispersiju, kura tiek definēta, balstoties uz datiem un parametriem.

$$l = -\frac{T \ln(2\pi)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln[\text{Var}(Y_{tP})] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{Y_{tE}^2}{2 * \text{Var}[Y_{tP}]}, \quad (1.23)$$

kur  $l$  – maksimālās ticamības koeficients;

$T$  - laika rindas periods;

$\text{Var}(Y_{tP})$  – mainīgā dispersija;

$Y_{tP}$  – mainīgā vidējā vērtība.

$$\text{Var}(Y_{tP}) = \text{Var}[X_{tP-ADJ}]m^2 + r_t, \quad (1.24)$$

kur  $X_{tP-ADJ}$  – starpība starp novērtētu jauno vērtību un prognozēto vērtību;

$m$  – zināma konstante;

$r_t$  – procentu likmes standartnovirze.

$$E(Y_{tP}) = E[mX_{tP-ADJ} + \varepsilon_t], \quad (1.25)$$

kur  $\varepsilon_t \sim N(0, r_t)$ .

Funkcijas  $l$  daļējais atvasinājums attiecībā pret katru parametru tiek iestatīts uz nulli, lai maksimizētu funkciju. Pēc parametru kopas novērtēšanas tiek izmantots kalman filtrs, lai izveidotu jaunas  $Y_{tP}$  un  $X_{tP-ADJ}$  laika rindas ar saistīto sadalījumu. Šāds novērtējums tiek veikts atkal un atkal, kamēr funkciju uzlabojumu starpība starp iepriekšējo un nākamo funkcijas vērtību nav mazāka par definēto.<sup>37</sup>

Apkopojot visu iepriekš apskatīto informāciju, darba autors secina, ka izmantojot maksimālās ticamības novērtēšanas metodi un definējot optimizācijas uzdevumā tiek atrasti parametri, kurus ievietojot vienādojumā veido mazāku kļūdu starp reāliem datiem un vienādojumā iegūtiem datiem. Jāatceras, ka mazāka starpība starp reāliem datiem un iegūtiem datiem veido mazāku kļūdu un lielāku maksimālas ticamības vērtību, līdz ar to lielāka ticamības vērtība parāda precīzāku rezultātu.

---

<sup>37</sup> Vo, L.H. Application of Kalman Filter on Modelling Interest Rates. *Journal of Managemem Sciences*. 2014, p.3.

## 2. PROCENTU LIKMES ANALĪZE

### 2.1. Makroekonomisko faktoru ietekme uz procentu likmi

Iepriekšējā daļā tika apskatīts, ka procentu likme ir saistīta ar visu ekonomiku kopumā. Darba autors secināja, ka procentu likme ir gan instruments, gan rezultāts, ko iegūst, mainoties makroekonomiskam stāvoklim. Šajā sadaļā darba autors praktiski apskatīs makroekonomisko radītāju saistības ar procentu likmi.

#### 2.1.1. Pētāmo valstu makroekonomiska stāvokļa apskats

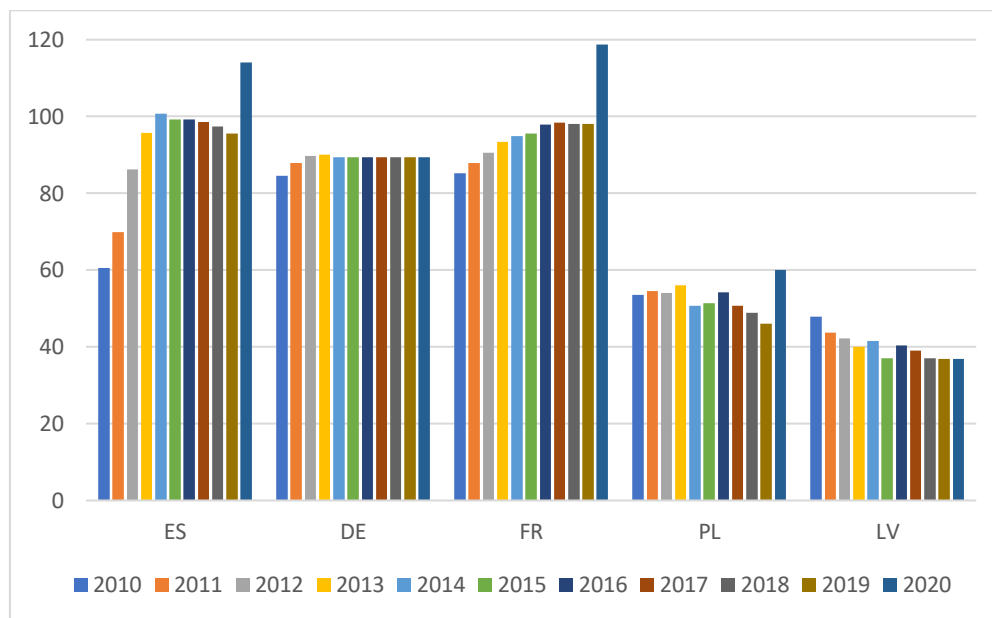
Šī darba mērķis ir novērtēt Eiropas Savienības dažādu valstu procentu likmes, kuras ir atvasinātas no valsts obligācijām. Tā kā Eiropas Savienībā ir iekļautas 27 Eiropas dalībvalstis, lai neanalizētu visas dalībvalstis, tika izvēlētas pēc autora domām valstis, kuras vislabāk interpretē visas Eiropas makroekonomisko stāvokli. Šajā sarakstā tika iekļauta Latvija, Polija, Spānija, Vācija, Francija. Visu valsts valūta izņemot Poliju ir eiro, Polijā valsts valūta ir zlots. Katrai izvēlētai valstij ir kaut kādas īpašības, kas padara to atšķirīgu no citām.

Vācija ir visaugstāk novērtētā valsts pēc Moody's, S&P un Fitch kredītreitinga un vadoša ekonomika Eiropas Savienībā. Vācijas obligācijas tiek uzskatītas par vienām no likvīdākajām Eiropas Savienībā, to arī apstiprina cenas pieprasījuma un piedāvājuma maza starpība, ko iespējams apskatīt Blomberg terminalī. Kā arī augsti novērtēts valsts kredītreitings, investoriem dod pārliecību par obligāciju drošumu. Francija ir otra Eiropas Savienības valsts pēc ekonomiskas nozīmes, diezgan tuvu pēc attīstības ar Vāciju. No reitingu aģentūras un investoru puses Francija ir novērtēta par vienu vienību zemāk nekā Vācija. Spānijai ir zemāks kredītreitings salīdzinājumā ar Vāciju vai Franciju, kas iespējams saistīts ar to, ka Spānija ieņem ceturto vietu ES pēc iekšējā parāda. Spānija ir valsts, kuras IKP radītāju veido 74,81% uz 2019. gadu no pakalpojumu servisa sniegšanas.<sup>38</sup> Šī informācija ir būtiska, jo tieši pakalpojuma sektors ir cietis visvairāk pandēmijas laikā. Polija ir vienīgā valsts, kurai valūta nav eiro, līdz ar to šajā gadījumā uz ekonomiku kā papildus ietekmējošais faktors ir valūtas kurss, kurš var palīdz stabilizēt ekonomiku ātrāk. Šis valsts IKP ir desmitajā vietā starp Eiropas valstīm, kā arī skatoties pēc IKP sadalījuma, var redzēt, ka tikai 56,9% no visa IKP 2019. gadā

---

<sup>38</sup>*Guide to Business in Spain*. [online]. [viewed 24 january 2021]. Available from: <https://www.guidetobusinessinspain.com/en/1-spain-an-attractive-country-for-investment/1-5-economic-structure/>

sastāda pakalpojumu sniegšana.<sup>39</sup> Latvija salīdzinājumā ar iepriekšējām valstīm ir pietiekoši maza valsts ar salīdzinoši mazu iedzīvotāju skaitu. Pakalpojumu serviss aizņem 64.09% no visa IKP uz 2019.gadu.<sup>40</sup> Bet neskatoties uz to pēc kredītreitingu novērtējuma, Latvija neatpaliek no Polijas un tikai mazliet atpaliek no Francijas.



2.1. att. Procentuāli iekšējais parāds pret IKP no 2010 līdz 2020.gadam (%).<sup>41</sup>

Apskatot 2.1 attēlu, var novērot, ka 2020. gadā vairākām valstīm pieauga iekšējais parāds pret IKP, kas nozīmē, ka iekšējais parāds valstī palielinājās, vai IKP saruka. Ņemot vērā pasaulē notikušo, kas saistīts ar pandēmiju, tad var pieņemt, ka abi faktori ir mainījušies un pēc attiecības var redzēt, ka Francijā, Spānijā un Polijā ir bijušas lielākas izmaiņas. Vācija un Latvija 2020. gadā noturēja šo rādītāju iepriekšējo gadu līmenī. Skatoties uz visu perioda griezumu, darba autors vēlējas pievērst uzmanību Latvijas tendencei, kur novērojams iekšēja parāda samazinājums pret IKP, kas parāda pozitīvu valsts ekonomikas izaugsmi.

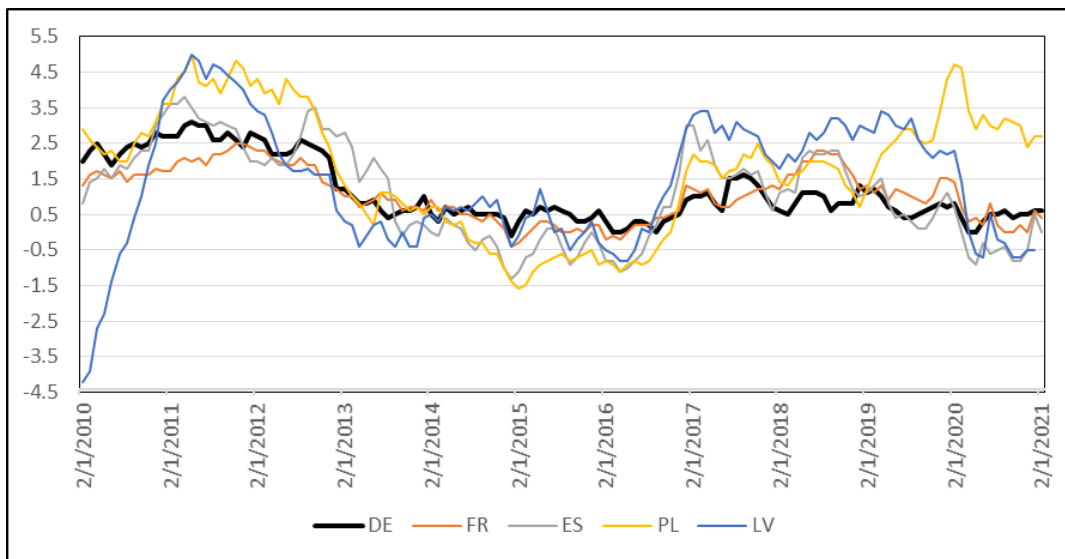
Makro faktoru modeļos tiks izmantoti divi makroekonomiskie faktori: inflācija un bezdarbs. Zemāk grafikos parādīta šo faktoru laika rindas no 2010. gada sākuma līdz 2021. gada februārim ieskaitot. Šie faktori tika apskatīti, jo pēc iegūtās informācijas 1. nodaļā, darba autors secina, ka tieši šie faktori precīzāk izskaidro procentu likmes dinamiku un otrādi.

<sup>39</sup> Statista. [online]. [viewed 24 january 2021]. Available from: <https://www.statista.com/statistics/375605/poland-gdp-distribution-across-economic-sectors/>

<sup>40</sup> Statista. [online]. [viewed 24 january 2021]. Available from: <https://www.statista.com/statistics/375583/latvia-gdp-distribution-across-economic-sectors/>

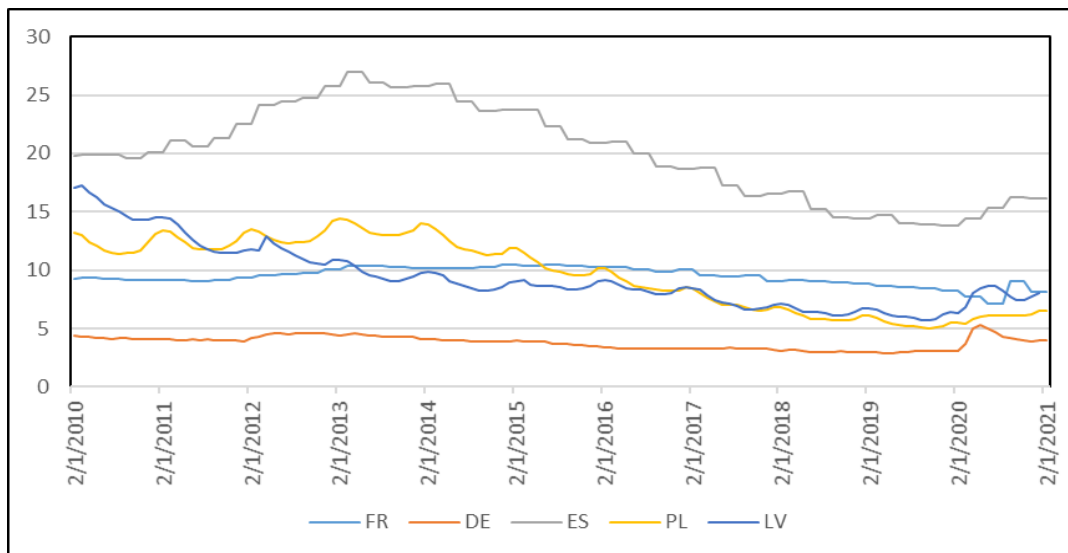
<sup>41</sup> Bloomberg terminal.





2.2.att. Inflācijas rādītāji pa 1 mēnesi<sup>42</sup>

Pēc inflācijas rādītājiem var redzēt, ka 2020. gada sākumā bija kritiens visām valstīm. Neskatoties uz to, Polija noturēja inflāciju pietiekoši augsti virs 2%, kad pārējās eiro zonas valstis pēc kritiena svārstījās ciešā intervālā starp -0.6 un 0.6. Skatoties uz 2.2 attēlu, var pamanīt lielu svārstību 2010. gadā, kad Latvijā bija -4.5% deflācija. Šī svārstība ir 2008. gada ekonomiskās krīzes sekas, kas tika novērotas Latvijā.



2.3.att. Bezdarba līmenis pa 1 mēnesi<sup>43</sup>

Pēc 2.3. attēla var redzēt, ka visu laiku lielākais bezdarba līmenis ir Spānijai, kas ietekmē arī kredītreitinga novērtējumu un obligāciju cenas prēmijas starpību starp citām ES

<sup>42</sup> Bloomberg terminal

<sup>43</sup> Turpat.

valstīm. Viszemākais bezdarba līmenis visā apskatītajā laika periodā bija Vācijai, visā periodā. Pievēršot lielāku uzmanību 2020. gadam, var redzēt tendenci, ka visās valstīs bezdarba līmenis par dažiem procentiem pieauga, ko var izskaidrot ar pandēmijas izraisītām sekām, bet vēlāk bezdarba līmenis sāka atgriezties pie iepriekšējā līmeņa.

### 2.1.2. Procentu likme statistiskie fakti

Šajā sadaļā darba autors analizēs, kā lineāri var aprakstīt sakarību starp makroekonomiskiem faktoriem un procentu likmes izmaiņām. Tā kā procentu likme atšķiras pēc laika līdz dzēšanai, kā arī investoram ir būtiski zināt procentu likmes termiņstruktūru, tad šajā sadaļā tiks izmantota procentu likmes starpība starp ilgtermiņa un īstermiņa procentu likmi, kas tālāk darbā tiks definēta, kā spreds.

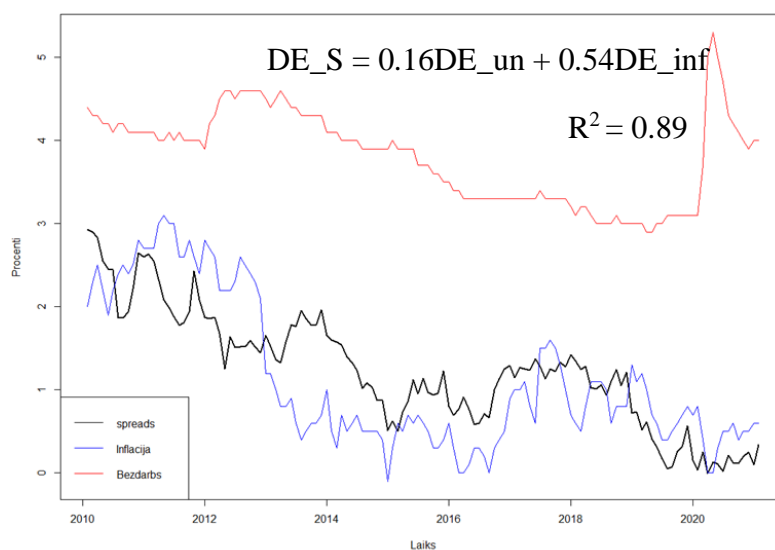
Kā benčmarkinga procentu likme tiek izmantota Vācijas obligāciju ienesīgumi, jo šis valsts ekonomika tiek uzskatīta par paraugu visai Eiropas Savienībai, papildus tam tikai Vācijai ir visaugstākais kredītreitinga novērtējums. Sākumā tiks apskatīta Vācijas procentu likmes spreda lineārā sakarība starp makroekonomiskiem faktoriem. Pēc 2.4.tabulā var redzēt, ka korelācija starp visiem faktoriem ir pozitīva, kas nozīmē, ka, palielinoties vienam faktoram, palielinās arī otrs faktors, ko arī parāda lineāras regresijas vienādojums 2.5. attēlā.

2.4. tabula

Vācijas procentu likmes spreda un makroekonomisko faktoru korelācijas matrica, par periodu

02.2010. – 02.2021. gadam

	Spreds	Bezdarbs	Inflācija
Spreds	1	0.36	0.72
Bezdarbs	0.36	1	0.34
Inflācija	0.72	0.34	1



2.5.att. Vācijas procentu likmes spreds ar makro faktoriem

kur spreds ( $DE\_S$ ) = 10 gadīgais ienesīgums – 3 mēnešu ienesīgums.

$DE\_un$  = Vācijas bezdarba līmenis,

$DE\_inf$  = Vācijas inflācija,

$R^2$  – parāda, cik daudz no  $DE\_S$  kustības izskaidro dotais vienādojums. Rezultātā pēc 2.5 attēla redzam, ka regresijas vienādojums izskaidro 89% no visa spreda kustības, kas tiek uzskatīts par labu rezultātu.

2.4 un 2.5 attēlā var redzēt, kā inflācijai ir lielāka korelācija un ietekme uz procentu likmes starpības izmaiņām nekā bezdarba līmenim. Kaut arī pēc 2.5 attēlā iegūtas lineārās regresijas bezdarba līmeņa faktors bija nozīmīgs, kas nozīmē, ka šis faktors arī ietekmē procentu likmes ienesīguma spredu. Iespējams, pievienojot papildus makroekonomiskus faktorus, būs iespējams iegūt lielāku modeļa precizitāti. Katrai valstij makroekonomiskie rādītāji var paskaidrot dažādu daļu no procentu likmes ienesīguma spreda, bet pēc 2.5 attēlotā piemēra, var saprast, ka lineārā likumsakarība pastāv.

Apskatot vairāku valstu ienesīguma spredus un, veicot korelācijas analīzi savā starpā, tika iegūts rezultāts, ka korelācijas pastāv. Tā kā pētījumā Latvijas obligāciju dati ir no 2016. gada, bet pārējo valstu ienesīgumi ir no 2010. gada, tad darba autors veica divas korelācijas analīzes ar Latvijas un bez Latvijas datiem. Korelācijas analīze tika pielietota, lai saprast vai valstu procentu likmju spreda kustībā pastāv kopīgie faktori, kas ietekmē spredu dinamiku.

2.6.tabula

Ienesīguma likmes spreda korelācijas analīze no 02.2010. – 02.2021. gadam

	Vācija	Francija	Spānija	Polija
Vācija	1	0.95	0.80	0.33
Francija	0.95	1	0.89	0.16
Spānija	0.80	0.89	1	-0.05
Polija	0.33	0.16	-0.05	1

Pēc 2.6. tabulas var redzēt ciešu korelāciju starp visām Eiropas Savienības valstu ienesīgu likmes starpībām, kurām ir eiro, kā valsts valūta. Polijas obligāciju ienesīguma starpība gan vāji korelē ar pārējām valstīm. Negatīva korelācija ar Spāniju un Poliju var izskaidrot ar Spānijas parāda krīzi 2012. gadā, kad spreds pieauga, bet Polijas tajā laikā obligāciju spreds samazinājās. Spānijas parāda krīze ietekmēja citas eirozonas valstis, kas paskaidro to, kāpēc visām valstīm līdz 2014. gadam būtiski atšķiras spreda dinamika, kā rezultātā korelācija ar Polijas spredu ir ļoti zema.

2.7.tabula

Ienesīguma likmju spreda korelācijas analīze 01.2016. – 02.2021.gadam

	Vācija	Francija	Spānija	Polija	Latvija
Vācija	1	0.98	0.94	0.88	0.84
Francija	0.98	1	0.96	0.89	0.85
Spānija	0.94	0.96	1	0.87	0.91
Polija	0.88	0.89	0.87	1	0.75
Latvija	0.84	0.85	0.91	0.75	1

Salīdzinot abas tabulas, 2.6 un 2.7 var redzēt, ka, ņemot mazāku laika intervālu, (no 2016. gada) Eiropas Savienību valstu korelācijas kļuva ciešākas un Polijas spreda korelācija ar pārējām valstīm būtiski izauga.



2.8.att. Visu apskatīto valstu spreadu dinamika

Tā kā pastāv būtiskas izmaiņas korelācijas analīzes rezultātos, ņemot dažādus laika intervālus, tad darba autors apskatīja grafiski visu valstu spreadu dinamiku. 2.8 attēlā var redzēt, ka no 2010. līdz 2016. gadam dažādu valstu spreadu dinamika bija atšķirīgāka nekā dinamika pēc 2016. gada. Iespējams, tāds korelācijas pieaugums tika sekmēts ar vāju volatilitāti procentu likmē. Pēc 2016. gada vairāku valstu obligācijas samazinājās līdz vai pat zem zemākai robežai, kas arī sekmēja spreada mazākas izmaiņas. Papildus tam, lai izskaidrotu šo parādību, jāpievērš uzmanība ekonomiskiem notikumiem, kas notika līdz un pēc 2016. gada.

### 2.1.3. Kredītreitings

Obligāciju tirgū riskus novērtē pēc emitenta defolta varbūtības. Šo varbūtību parāda kredītreitings, kas ir starptautisks rādītājs, kas parāda investīciju riska pakāpi.<sup>44</sup> Kas nozīmē, jo lielāks reitings, jo mazāka pastāv varbūtība, ka emitents neizpildīs savas saistības vai bankrotēs. Valsts obligācijām emitents ir valsts, un katrai valstij ir savs novērtējums. Populārākie un atdzītākie reitingu aģentūras ir S&P, Moody un Fitch. Var redzēt 2.9 tabulā. ir Eiropas valstu kredītreitinga izvilkums par darbā apskatītajām valstīm.

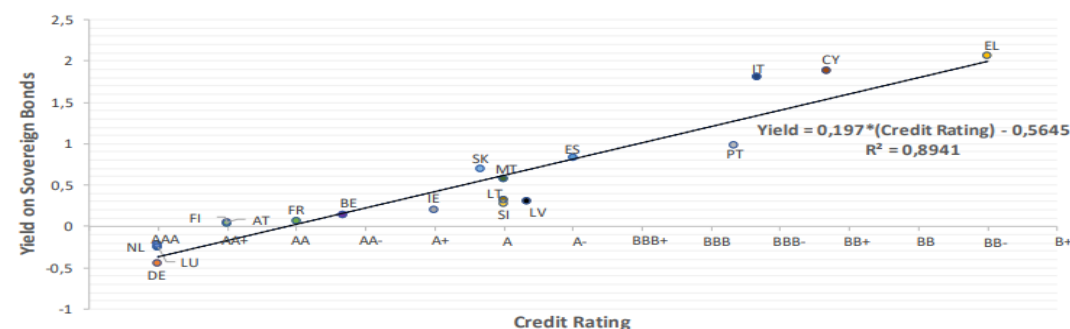
<sup>44</sup> Valsts kase. [Skatīts 14. janvārī 2020]. Pieejams: <https://www.kase.gov.lv/jaunumi/latvijas-kreditreitingu-paaugstina-vesturiski-visaugstakaja-limeni#article-text>

2.9. tabula

EU valstu kredītreitings uz 10 gadu obligācijām<sup>45</sup>

Valsts	S&P	Moody's	Fitch
Spānija	A	Baa1	A-
Latvija	A+	A3	A-
Vācija	AAA	Aaa	AAA
Francija	AA	Aa2	AA
Polija	A-	A2	A-

Kredītreitinga atšifrējums ir sekojošs, piemēram, Moody aģentūras: Aaa ir visaugstākais iespējamais novērtējums, pēc viņa seko Aaa1 un tā līdz Aaa3, tad ir A līdz A3, nākamais līmenis ir Baa1 līdz Baa3, tad ir Ba1 līdz Ba3 un zemākais no tā visa ir B1 līdz B3 līmenis. Jo sliktās reitings, jo lielāka varbūtība valsts defoltam. Ņemot vērā, ka risks ir lielāks, tad investori vēlē lielāku prēmiju par uzņemto risku, līdz ar to izriet likumsakarība, pie sliktāka reitinga, obligāciju ienesīgums būs lielāks.

2.10.att. 10. gadu obligāciju procentu likmes atkarībā no kredītreitinga<sup>46</sup>

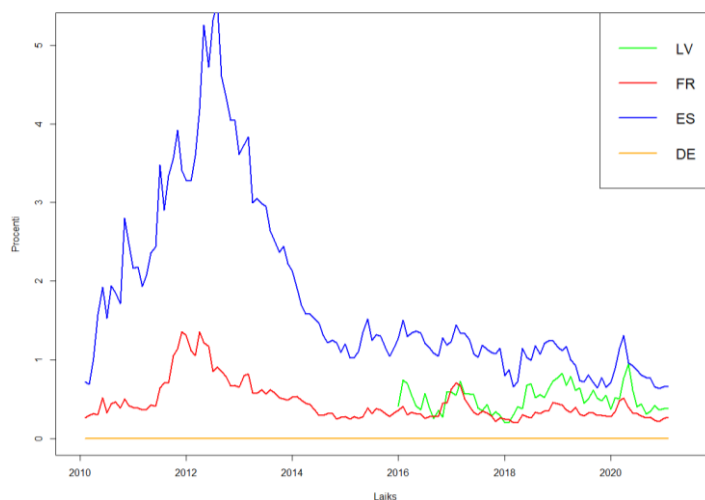
Aprakstīt 2.10 attēlu var redzēt, kā kredītreitings ietekmē katras valsts procentu likmes līmeni. Papildus tam kredītreitinga un procentu likmes sakarība ir lineāra un, izmantojot doto regresijas vienādojumu, ir iespējams izskaidrot 89% no procentu likmes līmeņa, kādai konkrētai valstij.

Apskatot šajā darbā pielietoto valstu obligāciju starpību starp Vācijas 10 gadīgo obligāciju ienesīgumiem un citu valstu 10 gadīgo obligāciju ienesīgumiem. 2.11.attēlā var

<sup>45</sup> Credit Rating for Euro Area Member States and European supranational institutions. [online]. [viewed 14. january 2021]. Available from: [https://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/BRIE/2020/651351/IPOL\\_BRI\(2020\)651351\\_EN.pdf](https://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/BRIE/2020/651351/IPOL_BRI(2020)651351_EN.pdf)

<sup>46</sup> Credit Rating for Euro Area Member States and European supranational institutions. [online]. [viewed 14. january 2021]. Available from: [https://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/BRIE/2020/651351/IPOL\\_BRI\(2020\)651351\\_EN.pdf](https://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/BRIE/2020/651351/IPOL_BRI(2020)651351_EN.pdf)

redzēt kredītriska prēmiju, jo sliktāks kredītreitings, jo lielāka starpība starp benčmarkinga procentu likmi un citas valsts procentu likmi.



2.11.att. 10 gadīgo procentu likmju starpība mīnus Vācijas 10 gadīgo procentu likmi

Polija netika ietverta šajā analīzē, jo darba autors uzskata, ka atšķirīgas valsts valūtas riski būs ietverti papildus kredītriska prēmijā un rezultāti būs maz ticami.

Valstu kredītreitings investoram dod informāciju par valsts stabilitāti, ekonomikas stāvokli un daudz citas noderīgas informācijas. Novērojot likumsakarību starp reitingu un procentu likmi, var redzēt, ka procentu likmes līmenis ir tieši saistīts. Ja valstij mainās kredītreitings, tad var notikt lielas izmaiņas šīs valsts obligāciju cenās. Procentu likme samazinās, ja reitings ir labāks vai palielinās, ja reitings ir kļuvis sliktāks.

## 2.2.Valstu procentu likmes novērtējums un ienesīguma likmes prognozē

Šajā darbā tika apskatītas piecas Eiropas Savienības valstis, katrai valstij piemīt savas atšķirības – inflācijas, bezdarba rādītāji, iekšējais parāds, kredītreitings, valsts izmērs un IKP sadalījums. Kopīgs šīm valstīm ir tas, ka visas valstis ir Eiropas Savienībā, izņemot Poliju visām valstīm ir eiro kā valsts valūta. Nevar aizmirst par pasaules ekonomiskās situācijas ietekmi, ņemot vērā mūsdienu apstākļus, kas ir 2021. gada sākumā, kad lielākā daļa valstu ievēro piesardzību, ierobežo kustību, tirdzniecību u.t.t. Šie faktori dažādi ietekmē darbā apskatīto valstu obligāciju cenas, kas atspoguļo investoru attieksmi pret noteikto valsti. Tālāk darbā tiks izskatīta katra valsts atsevišķi, pielietoti četri iepriekš minētie ēnu procentu likmes modeļi. Tiks novērtēta ēnu procentu likme, kā arī tiks veikta ēnu procentu likmes prognoze izmantojot VAR modeli, papildus izmantojot modeļu affines struktūru, tika izveidota ienesīguma termiņstruktūras prognoze.

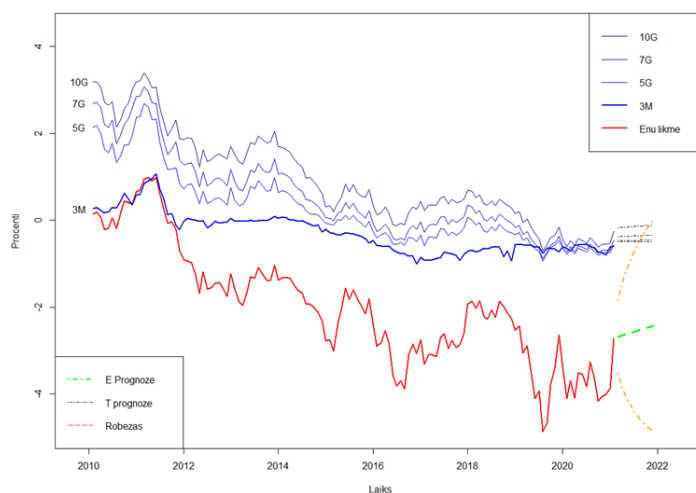
Visi zemāk aprakstītie attēli ir darba autora iegūtie analīzes rezultāti, kuri ir atspoguļoti grafiski. Grafīkos tika izmantoti apzīmējumi, kurus atšifrē sekojoši: 3M – trīs mēnešu procentu likme, 5G – piecu gadu procentu likme, 7G – septiņu gadu procentu likme, 10G – desmitgadīga procentu likme, E Prognoze – ēnu procentu likmes prognoze, T Prognoze – termiņstruktūras prognoze. Darbā tiek izmantoti dati par periodu no 28/02/2010. līdz 28/02/2021. ieskaitot, tiek izmantoti mēneša dati. Lai novērtētu obligāciju ienesīguma termiņstruktūru tika izmantotas astoņas procentu likmes katrai valstij par periodu: trīs, seši un deviņi mēneši, vienu, diviem, pieciem, septiņiem un desmit gadiem.

### **2.2.1.Vācija**

Vācija ir valsts ar visaugstāk novērtētu kredītreitingu, vadošā ekonomika Eiropas Savienībā un viena no svarīgākajām pasaulē. Var pieņemt, ka investori ir pārliecināti par ekonomikas un valsts stabilitāti. Viens no zemākajiem bezdarba rādītājiem starp izskatītajām valstīm, inflācijas līmenis zems, pēc pandēmijas rādītājiem sekām valstī fiksēta deflācija. Īstermiņa procentu likme jau no 2012. gada ir zem zemākās robežas, un pēc 2016. gada desmit gadīgas obligācijas pirmo reizi šķērsoja nulles robežu, un ienesīgums kļuva negatīvs. 2019. gada otrajā pusē bija novērojams liels kritums ilgtermiņa obligāciju ienesīgumam, kas noveda, ka obligāciju ienesīguma starpība starp desmitgadīgo un trīs mēnešu obligāciju kļuva ļoti maza salīdzinājumā ar iepriekšējiem periodiem, pie tam šāda situācija turpinās ilgtermiņā.

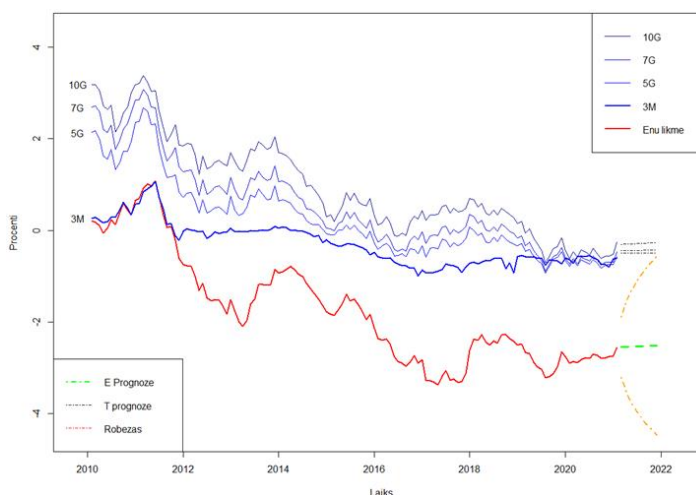
Modeļu izmantošanas spefikācija: modeļi ar tikai nenovērojamajiem faktoriem tiek pielāgoti mainīgai zemākai robežai attiecīgi ECB depozītu procentu likmei un tās periodam, modeļiem ar makroekonomiskiem faktoriem tiek definēta zemāka depozīta robeža, kas sastāda -0.5%. Izņēmums ir modeļi ar tikai nenovērojamajiem faktoriem, kur tika aizvietots -0.5% ar -0.71%, šī vērtība ir vienāda ar mazāko desmit gadu procentu likmi. Tas tika izmantots, jo vietās, kur desmitgadīgā procentu likme samazinājās zem -0.5%, modelis uzvedās neadekvāti un nereaģē uz ienesīguma termiņstruktūras izmaiņām.





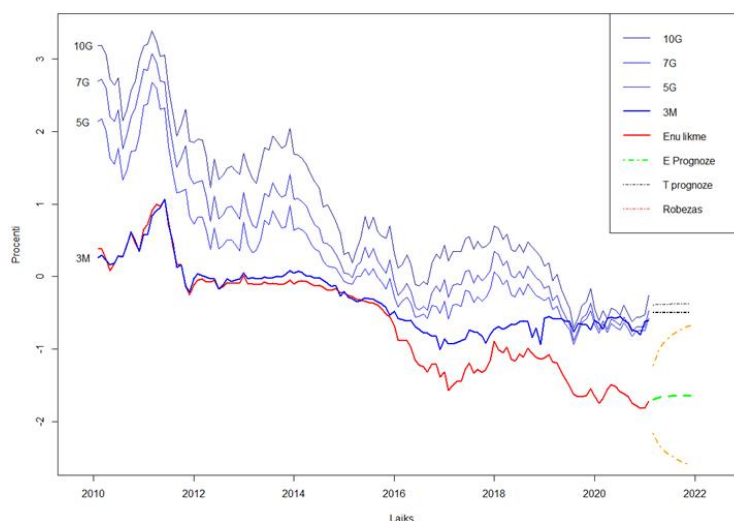
2.12.att. L.Krippnera procentu likmes modelis, Vācija

Pēc 2.12 attēlotā rezultāta var redzēt, ka Ēnu procentu likme turpinās pieaugt, kas norāda uz investoru gaidām par ekonomikas straujāku izaugsmi. Inesīguma likmes termiņstruktūras prognoze liecina, ka tā arī mazliet pieaugs un kļūs platāka.



2.13.att. V.Ajevskā procentu likmes modelis, tikai nenovērojami faktori, Vācija

Pēc 2.13 attēlotā rezultāta var redzēt, ka Ēnu procentu likme tuvākajā laikā būtiski nemainīsies. Pie procentu likmes dinamikas var pamanīt desmitgadīgas procentu likmes nelielu pieaugumu, kas sekmēs procentu likmes termiņstruktūras paplašināšanos un starpības pieaugumu starp desmitgadīgo un īstermiņa procentu likmi.



2.14. att. M.D.Bauera un G.D. Rudenbuša makro modelis, Vācija

Pēc 2.14 attēlotā modeļa prognozē ir novērojams, ka ēnu procentu likme, visticamāk, svārstīsies ap tagadējo vērtību, kas arī sekmē to, ka ienesīguma likmes izmaiņas arī būtiskas izmaiņas netiek prognozētas.



2.15.att. V.Ajevskā procentu likmes modelis ar makro faktoriem, Vācija

Attēlotajā 2.15 attēlā var novērot, ka ēnu procentu likmes tendence turpināsies, bet šajā gadījumā, iespējams, nepieciešams modeli pārvērtēt, izmainot zemāko robežu, jo iespējams modelis, vienkārši neuztver ienesīguma likmes izmaiņas, kamēr visas procentu likmes ir zem -0.5%. Izmantojot dotā modeļa rezultātus, var prognozēt ienesīguma likmes samazināšanos, kas iet pretrunā ar citiem modeļiem.

Pievēršot uzmanību makroekonomiskiem rādītājiem, var pieņemt, ka ekonomikas ierobežošana tuvākajā laikā nav nepieciešama, ko nevar teikt par stimulēšanu, lai saglabātu

ekonomisko izaugsmi un stabilitāti tajā pašā līmenī. Ņemot vērā prognozes, var secināt, ka starpība starp ilgtermiņa un īstermiņa procentu likmi var palielināties, kas nozīmē, ka termiņstruktūra paliks platāka, kas arī norāda gaidas par makroekonomiskas situācijas uzlabošanos valstī tuvākajā laikā.

### 2.2.2. Francija

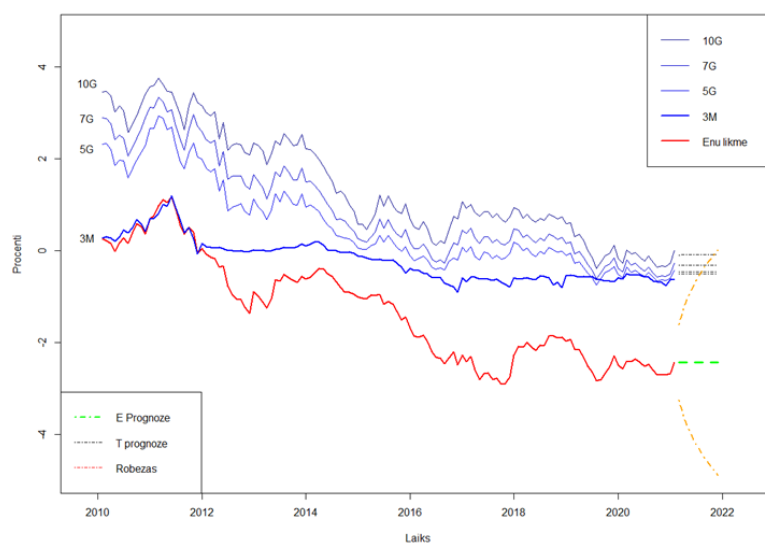
Valsts ar augsti novērtētu kredītreitingu un svarīgu ekonomisku nozīmi Eiropas Savienībā un pasaulē. Pēc valsts attīstības līmeņa līdzīga Vācijai, bet diemžēl, vairāki makroekonomiski faktori liecina par ekonomikas lēnāku attīstību. Bezdarba līmenis ir augstāks par Vācijas bezdarba līmeni. Pandēmijas izraisītās sekas valstī radīja deflāciju, kā arī valstij ir viens no lielākajiem iekšējiem parādiem pret IKP salīdzinājumā ar citām izskatītajām valstīm. Procentu likmes attīstība ir ļoti līdzīga Vācijas procentu likmei.

Modeļu specifika tika izmantota līdzīgi Vācijas modeļu specifikas aprakstam, izņēmums viszemākā robeža visiem modeļiem bija  $-0.5\%$ , kas ir vienāds ar ECB depozīta likmi.



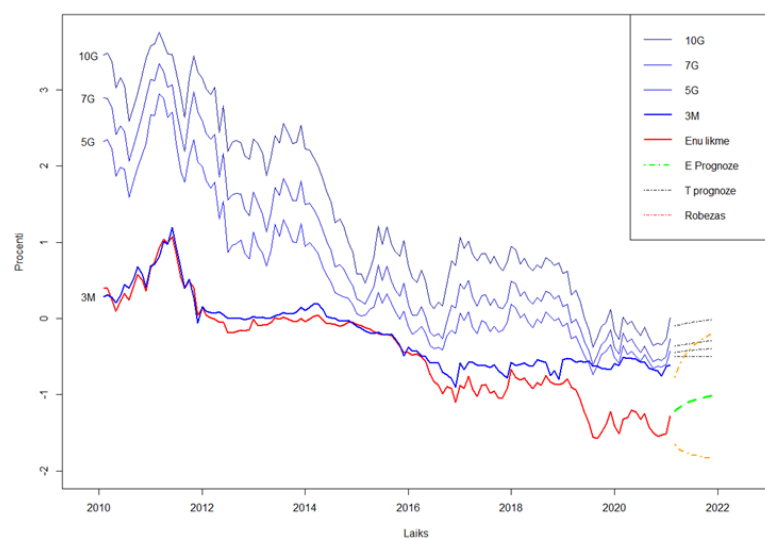
2.16.att. L.Krippnera procentu likmes modelis, Francija

Pēc 2.16. attēlotā rezultāta var redzēt, ka ēnu procentu likme ir zem nulles robežas jau ilgu laiku un pēc prognozes tuvākajā laikā tā varētu mazliet pieaugt, kas arī sekmēs ienesīguma likme pieaugumu, ko arī liecina prognozes dati, ka pastāv neliela tendence ilgtermiņa procentu likmes pieaugumam.



2.17.att. V.Ajevskā procentu likmes modelis, tikai nenovērojami faktori, Francija

Apskatot 2.17.attēloto modeļa rezultātus, var redzēt, ka tuvākajā laikā ēnu procentu likme paliks savā līmenī bez būtiskām izmaiņām. Ienesīguma likmē arī netiek prognozētas jebkādas izmaiņas.



2.18. att. M.D.Bauera un G.D. Rudenbuša makro modelis, Francija

Apskatot 2.18. attēlu, modeļa rezultātus var redzēt, ka ēnu procentu likme ir lielāka nekā iepriekšējiem modeļiem, bet to var paskaidrot ar zemākas robežas definēšanu, kas šajā gadījumā bija tikai  $-0.5\%$ . Pēc prognozes ēnu procentu likme var pieaugt. Līdz ar to tas arī var sekmēt, ka termiņstruktūra paliks plātāka, bet īstermiņa procentu likme turpinās būt zem  $-0.5\%$ .



2.19.att. V.Ajevskā procentu likmes modelis ar makro faktoriem, Francija

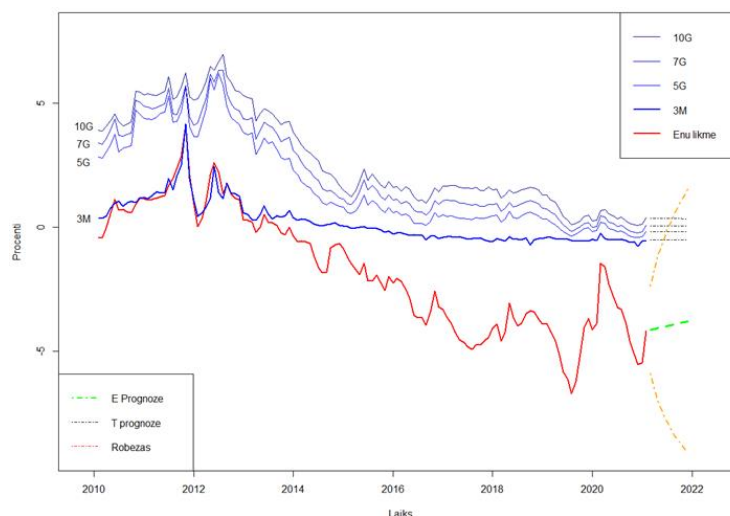
Pēc 2.19. attēlotā modeļa var redzēt, ka ēnu procentu likme līdzīgi 2.17 attēlotajam modelim nākotnē būtiski nemainīsies. Un ienesīguma likme var palikt pat šaurāka, kas iet pretrunā ar visiem iepriekšējiem modeļiem.

Apskatot visus modeļus, var secināt, ka tuvākajā laikā ēnu procentu likme, visticamāk, paliks tajā pašā līmenī vai pieaugs, līdz ar to iespējams sagaidīt, ka ienesīgu likme paliks platāka un ilgtermiņa procentu likme varētu pieaugt. Iespējams, tas ir ECB monetārās stimulēšanas rezultāts, kas turēs īstermiņa procentu likmi pie zemākās robežas. Tajā pašā laikā modeļi parāda ilgtermiņa procentu likme pieaugumu, kas norāda uz investoru gaidām par Francijas ekonomikas izaugsmi.

### 2.2.3. Spānija

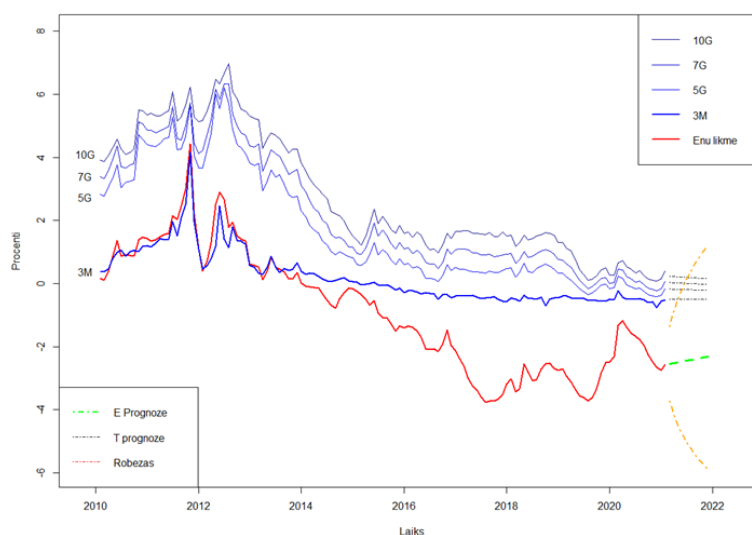
Valsts ar zemāko kredītreitingu starp izskatītajām valstīm. Augstu bezdarba līmeni, kas ar pandēmijas situāciju tikai pasliktinājās. Zemu inflācijas līmenis, kas parāda valsts ekonomikas lēnu attīstību. Salīdzinoši ar pārējām izskatītajām valstīm desmitgadu robežā ir viens no straujākajiem iekšēja parāda pieaugums pret IKP rādītāju. IKP lielākā daļa sastāda pakalpojuma sektors, kas pandēmijas laikā cieta visvairāk. Var pieņemt, ka Spānijas ekonomika ir cietusi ievērojami stiprāk pēdējo gadu salīdzinājumā ar citām izskatītajām valstīm. Trīs mēnešu valsts parādzīmes no 2015. gada pirmo reizi kļuva ar negatīvu ienesīgumu, kas sasniedza savu maksimumu 2018. un 2020. gadā pietuvojoties -0.5% robežai. Desmitgadīgo obligāciju ienesīgums vēl joprojām saglabājas pozitīvs, kaut arī 2020. gadā pietuvojās nulles robežai. Šī valsts tika iekļauta analīzē, jo darba autors pieņēma, ka Spānija varētu labi reprezentētu Eiropas dienvidvalstu situāciju kopumā.

Modeļu specifiskācija tikai izmantota līdzīgi Francijas modeļu specifiskāciju aprakstam.



2.20.att. L.Krippnera procentu likmes modelis, Spānija

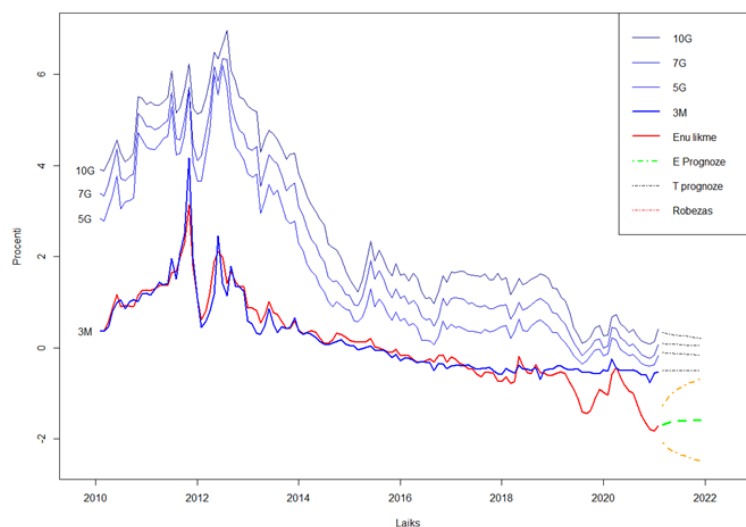
Pēc 2.20. attēlotā modeļa rezultāta ēnu procentu likme, diezgan jūtīgi reaģēja uz ienesīguma likmes izmaiņām, kas izveidoja lielas svārstības starp 2019. un 2021. gadu. Ietekmējošais faktors, visticamāk, bija īstermiņa procentu likmes pieskare zemākai robežai un strauja ienesīguma samazināšanās ilgākām periodam, kas novērojams 2019. gada otrā pusē. Pēc prognozes var redzēt, ka tuvākajā laikā ēnu procentu likme var pieaugt, bet procentu likmes termiņstruktūra būtiski nemainīsies.



2.21.att. V.Ajevskā procentu likmes modelis, tikai nenovērojami faktori, Spānija

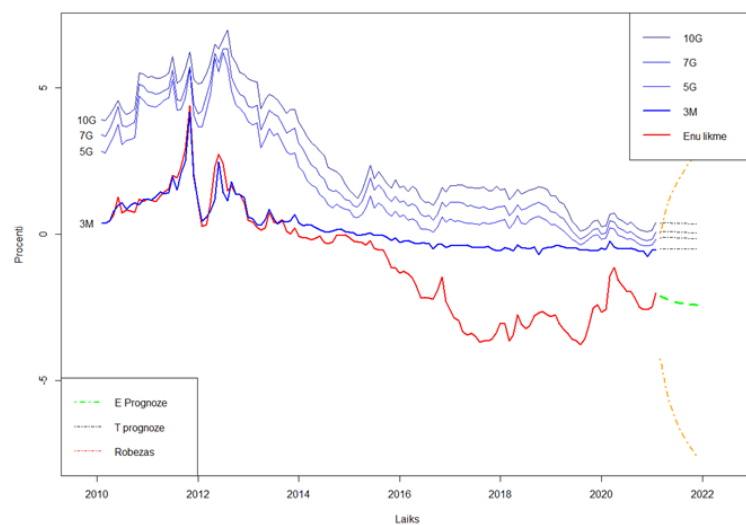
Pēc 2.21 attēlotā modeļa var redzēt līdzību ar 2.20. attēlu, vienīgais šis modelis mazliet mazāk jūtīgi reaģēja uz ienesīguma likmes svārstībām. Prognoze uz tuvāko laiku parāda, ka

ēnu procentu likme būtiski nemainīsies, bet ienesīguma likme varētu palikt šaurāka un ilgtermiņa procentu likme samazināsies.



2.22.att. M.D.Bauera un G.D. Rudenbuša makro modelis, Spānija

Pēc 2.22 attēlotā modeļa ēnu procentu likme tuvākajā nākotnē būtiski nemainīsies. Apskatot prognozi, var redzēt, ka tuvākajā laikā var sagaidīt ienesīguma likmes nelielu samazināšanos, līdzīgi kā 2.21. attēlā.



2.23.att. V.Ajevskas procentu likmes modelis ar makro faktoriem, Spānija

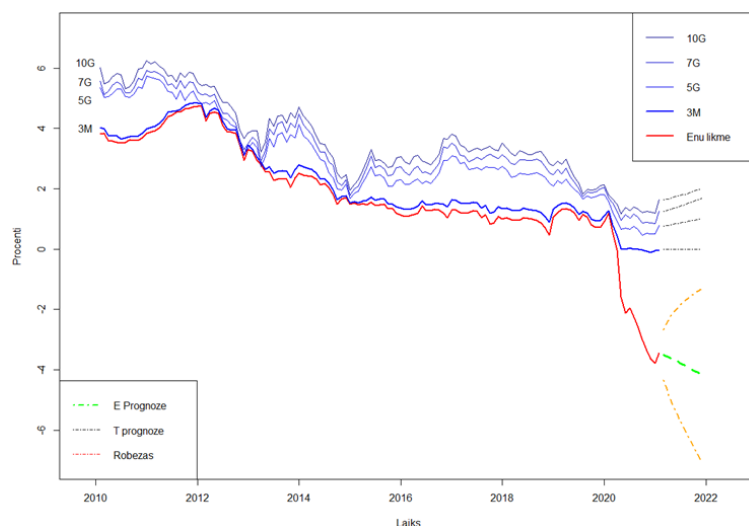
Pēc 2.23 attēla modeļa ēnu procentu likmes dinamika ir ļoti līdzīga 2.21 attēlotajam modelim, bet ēnu procentu likmes kustības prognoze atšķiras. Apskatot prognozi var secināt, ka tuvākajā laikā var sagaidīt ēnu procentu likmes nebūtisku samazināšanos, kas neatspoguļosies uz termiņstruktūras un tā paliks savā līmenī.

Izveidojot kopsavilkumu var redzēt, ka tuvākajā laikā pēc diviem modeļiem var sagaidīt Spānijas obligāciju cenu kāpumu, bet pēc atlikušiem diviem modeļiem, ka cenas būtiski nemainīsies. Iespējams, tas ir saistīts ar investoru gaidām, ka Spānijā būs lēnāka ekonomikas attīstība pēc pandēmijas ierobežojumu noņemšanas salīdzinājumā ar Vāciju vai Franciju.

#### 2.2.4. Polija

Kā jau tika minēts vienīgā valsts ar valsts valūtu atšķirīgu no eiro ir Polija, kur valsts valūta ir zlota. A2 kredītreitingā pēc kredītreitinga aģentūras Moody's. Uz pētījuma brīdi Polijā bezdarba līmenis ir ap 6%. Pievēršot lielāku uzmanību 2020. gadam, var redzēt tendenci, ka visās valstīs izņemot Poliju bezdarba līmenis pieauga, Polijā palika uz tā paša līmeņa. Inflācijas rādītāji pēdējo gadu ir virs 3%, kad pārējām apskatītajām valstīm inflācijas līmenis samazinājās un pat iestājās deflācija. Iekšējais parāds par 10 gadiem gandrīz nav izmainījies. Kā arī Polijai ir salīdzinoši labvēlīgāks IKP sadalījums, jo pakalpojumu sfēra sastāda mazāko procentu no visām pārējām apskatītajām valstīm, kas nozīmē, ka valsts ienākumi ir sabalansētāki. Šo valsti darba autors apskatīja, jo ģeogrāfiski šī valsts ir līdzīga Latvijai, kā arī ekonomikas attīstības līmenis ir pietiekoši līdzīgs.

Modeļu specifiskācija: zemākā nulles robeža visos modeļos tiek definēta kā 0, jo tikai pēdējā gadā Polija pietuvojās nulles robežai, un tikai pēdējos mēnešu īstermiņa procentu likme ir mazliet zem nulles.

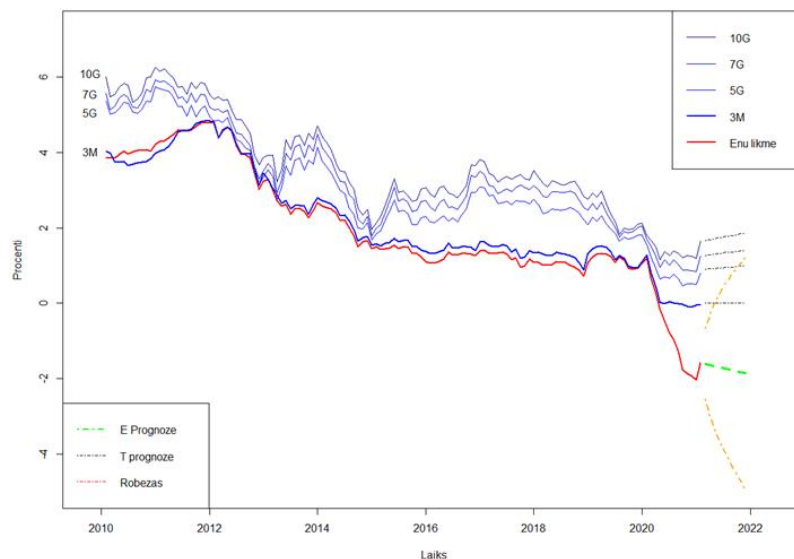


2.24. att. L.Krippnera procentu likmes modelis, Polijai

Pēc modeļa rezultāta attēlotā 2.24. attēlā var redzēt, ka tuvākajā laikā ēnu procentu likme turpinās samazināties, bet tās temps būs lēnāks nekā 2020. gadā. Šo samazinājumu

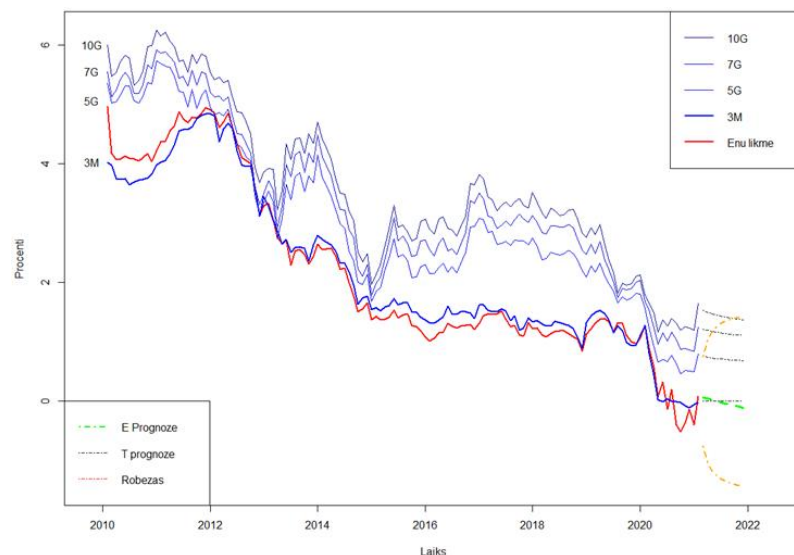


raksturos īstermiņa procentu likmes, kas svārstīsies ap nulli. Ilgtermiņa procentu likmēm tiek gaidīts pieaugums, kas veidos procentu likmes termiņstruktūru platāku.



2.25.att. V.A. procentu likmes modelis, tikai nenovērojami faktori, Polija

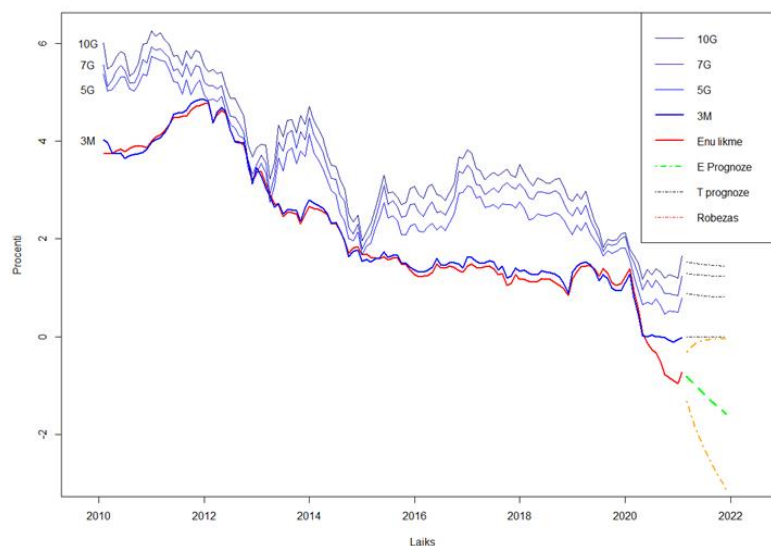
2.25.attēlotais modelis prognozē, ka tuvākajā laikā ēnu procentu likme būtiski nesamazināsies, īstermiņa procentu likme turpinās svārstīties ap nulli. Skatoties uz termiņstruktūras prognozi var secināt, ka tā ir līdzīga 2.24. att., termiņstruktūra paliks platāka, kas nozīmē, ka ilgtermiņa procentu likme pieaugs.



2.26.att. V.Ajevskā procentu likmes modelis ar makro faktoriem, Polija

Apskatot 2.26. attēlu ar makro faktoriem ir redzama līdzība pēc prognozes ar 2.26.attēloto modeli, kur ēnu procentu likme turpinās samazināties un šajā gadījumā

atgriezīsies negatīvajā teritorijā. Pēc šī modeļa prognozes, var sagaidīt termiņstruktūras sašaurinājumu, kas iet pretrunā ar iepriekšējām prognozēm.



2.27.att. M.D.Bauera un G.D. Rudenbuša makro modelis, Polija

Apskatot 2.27.attēloto modeli var redzēt, ka šī modeļa ēnu procentu likmes kustības prognoze sakrīt ar visiem iepriekšējiem modeļiem. Bet, apskatot procentu likmes termiņstruktūras attīstības tendenci, tad var redzēt, kā šī prognoze sakrīt tikai ar 2.26. attēloto modeli.

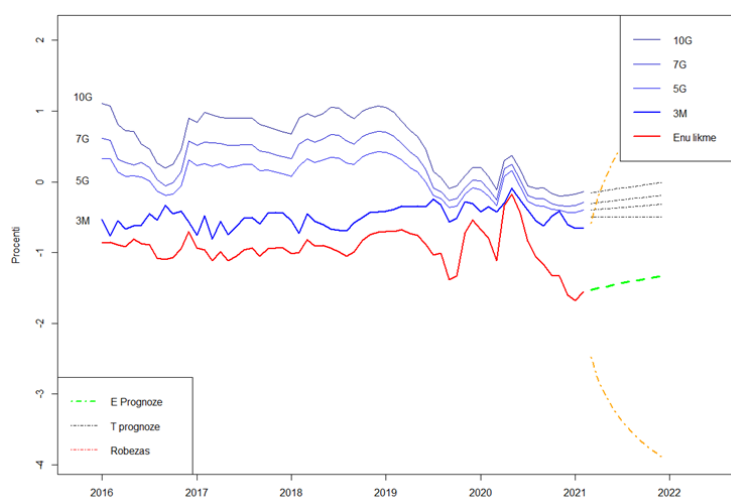
Apskatot visus modeļus, var redzēt nenoteiktību prognozē, bet var pamanīt arī kopīgas likumsakarības. Visi modeļi ir parādījuši, kā 2020. gada sākumā, kad procentu likmes sabruka un īstermiņa procentu likme pietuvojas nulles robežai, ēnu procentu likme noslīdēja zem tās robežas. Kas parāda, ka investori izmanto iespēju un tur naudu kā fizisku aktīvu vai atrod alternatīvu depozīt noguldījumam. Papildus tam var pamanīt sakritību, ka modeļi tikai ar nenovērojamiem faktoriem prognozē termiņstruktūras paplašinājumu, kad modeļi ar makro faktoriem prognozē termiņstruktūras sašaurinājumu.

Skatoties makro datus it īpaši, pievēršot uzmanību inflācijas rādītājiem, var pieņemt, ka inflācijas mazināšanai būs nepieciešama centrālās bankas iejaukšanās. Instruments, ar ko iespējams ierobežot inflāciju, ir procentu likmes celšana, kas ierobežos Polijas ekonomikas izaugsmi. Ņemot vērā, ka bezdarba līmenis ir zemāks un inflācija lielāka par 2%, var pieņemt, kā pēc pandēmijas seku novēršanas tiks palielināta procentu likme. Šis secinājums arī sakrīt ar izmantoto modeļu prognozēm.

## 2.2.5.Latvija

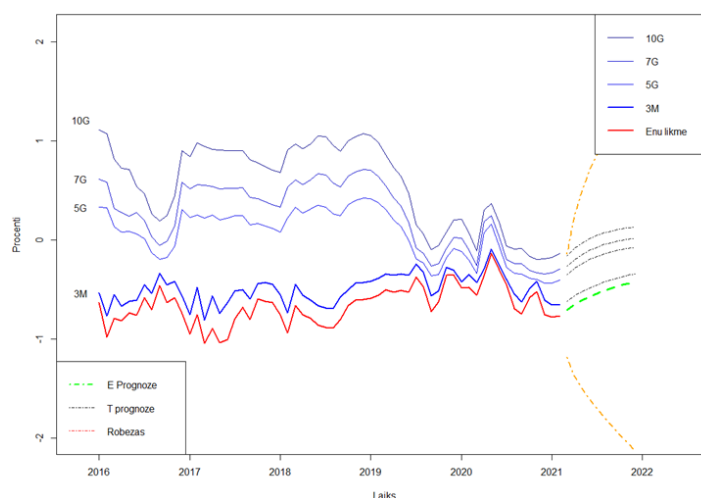
Vienīgā no apskatītajām valstīm, kas ir pietiekoši maza gan teritoriāli, gan iedzīvotāju skaita ziņā, bet ar pietiekoši labu kredītreitingu. Bezdarba līmenis ir līdzīgs Francijai. Skatoties pēc inflācijas rādītājiem, var teikt, ka valstij izdodas pieturēties ECB mērķim, izņēmums ir pēdējie mēneši, kur ir acīmredzamā pandēmijas ietekme un Latvijā līdzīgi pārējam valstīm ir novērojama deflācija. Obligāciju cenas par pēdējiem pieciem gadiem ir ar negatīvu ienesīgumu, kur trīs mēnešu valsts parādzīmes svārstās ap -0.5% ienesīgumu.

Modeļu specifiskā zemākā robeža visiem modeļiem bija -0.5%. Pieejami dienas dati bija no 2016. gada janvāra. Šie dati tika aproksimēti ar trešās kārtas polinomu, lai iegūtu aptuvenas vērtības noteiktam termiņam līdz dzēšanai. Vēlāk datu kopa tika sadalīta pēc mēnešiem, ja datos tika novērotas ekstrēmas vērtības, tad tās tika nogludinātas ar dotā mēneša vidējo vērtību. Līdz ar to iegūti dati var nebūtiski atšķirties no reālo obligāciju ienesīgumiem.



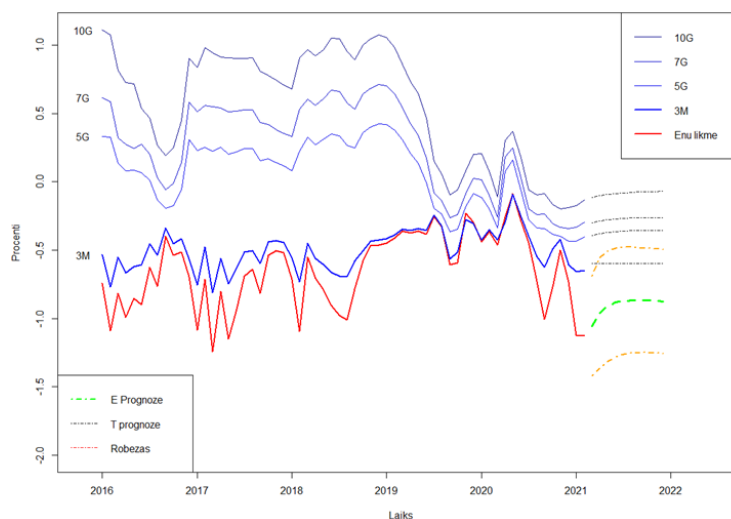
2.28.att. L.Krippnera procentu likmes modelis, Latvija

Apskatot 2.28. attēlotā modeļa rezultātu var redzēt, ka ēnu procentu likmes dinamika ir līdzīga trīs mēnešu procentu likmei ar nobīdi uz leju, tikai sākot ar 2019. gadu svārstības kļuva lielākas salīdzinājumā ar īstermiņa procentu likmi. Pēc prognozes var pieņemt, ka ēnu procentu likme pieaugs, kas sekmēs ienesīguma likmes paplašinājumu.



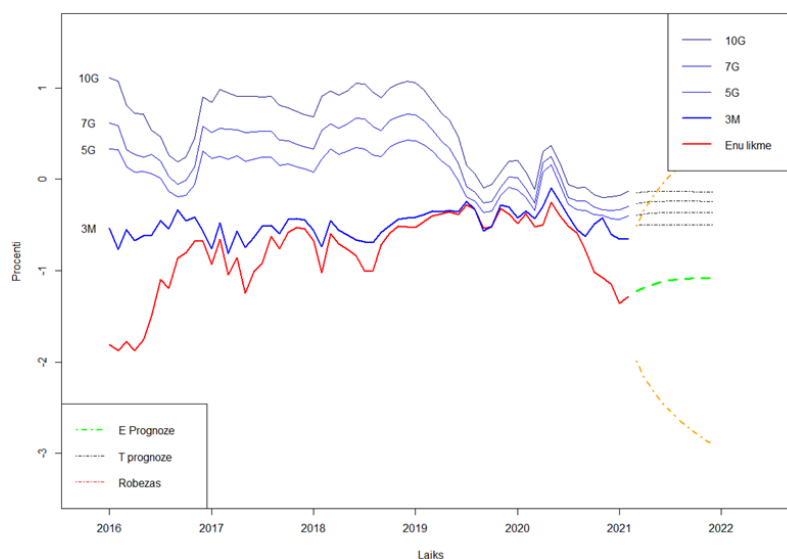
2.29.att.V.Ajevskā procentu likmes modelis, tikai nenovērojami faktori, Latvija

Pēc 2.29. attēla modeļa prognoze ir līdzīga 2.28.attēlotajam modelim. Savukārt apskatot ēnu procentu likmes dinamiku, tad tā sakrīt ar īstermiņa procentu likmes dinamiku ar nelielu nobīdi uz leju.



2.30.att. M.D.Bauera un G.D. Rudenbuša makro modelis, Latvija

Apskatot 2.30.attēlu, modelis pēc ēnas procentu likmes ir līdzīgs jau apskatītajiem modeļiem, bet pēc ēnu procentu likmes prognozes ir nelielas atšķirības. Neskatoties uz atšķirībām, ienesīguma likmē var sagaidīt pieaugumu, kaut arī ēnu procentu likme var palikt tajā pašā līmenī.



2.31.att. V.Ajevskā procentu likmes modelis ar makro faktoriem, Latvija

Apskatot 2.31 attēlu, modeļa ēnu procentu likme ir līdzīga iepriekšējiem modeļiem. Pēc modeļa prognozes ēnu procentu likme, visticamāk, pieaugs, ka arī ienesīguma likme pieaugs.

Apskatot visus modeļus, var secināt, ka tuvākajā laikā ēnu procentu likme, visticamāk, pieaugs un termiņstruktūra paliks platāka. Bet pēc visām prognozēm var redzēt, ka tuvākajā laikā nebūs būtiskas procentu likmes izmaiņas, ko var izskaidrot ar centrālās bankas stimulēšanas pasākumiem un procentu likmes turēšanu pie zemākas robežas. Lai gan Latvija ir maza valsts, obligāciju tirgus cenas svārstības ir pietiekoši līdzīgas Vācijas obligācijām. Kā viens no piemēriem ir 2019. gada rudens laika posmā novērojamais termiņstruktūras sašaurinājums, kas tika izraisīts ar ECB depozīta likmes samazināšanos. Kā arī apskatot nākotnes prognozi, tad Latvijas obligāciju tirgus gaidas ir līdzīgas Vācijas tirgus gaidām, kur tiek sagaidīta termiņstruktūras paplašināšanās. Kas savukārt, norāda uz investoru gaidām par nākotnes ekonomisko izaugsmi, kas iekļauj sevī inflācijas tempa palielināšanos un bezdarba līmeņa samazināšanos.

### 3. PROCENTU LIKMJU MODEĻU IEGŪTO REZULTĀTU INTERPRETĀCIJA

Veidojot modeļus, pētniekam vienmēr jāsaprot, kādus rezultātus ir iespējams iegūt, kā tos rezultātus interpretēt un izmantot, lai iegūtu noderīgu informāciju. Šajā darbā modeļu rezultātos tika iegūta ēnu procentu likme, kas atspoguļo monetārās politikas vispārējo nostāju, kad īstermiņa procentu likme ir tuvu vai zem zemākās robežas. Apskatot vairākas ēnu procentu likmes Eiropas Savienības ietvaros, var secināt, par monetārās politikas nostāju kopumā un cik līdzīgi monetārās politikas lēmumi ietekmē katras Eiropas Savienības valsts obligāciju ienesīguma tendences.

#### 3.1. Ēnu procentu likmes galveno komponentu analīze

Vairāku ēnu procentu likmju analīze, pēc darba autora domām, dos iespēju novērtēt ECB monetārās politikas efektivitāti visas Eiropas Savienības ietvaros. Šim nolūkam tiks izmantota galveno komponentu analīze, kas parādīs, cik daudz faktoru izskaidro ēnu procentu likmes kustību starp dažādām valstīm. Tika izmantotas visas darbā iepriekš analizētās valstis, izņemot Latviju, jo Latvijas ēnu procentu likmes laika rindas garums bija divas reizes mazāka nekā pārējām izskatītajām valstīm. Analīze tika veikta atsevišķi katram modelim.

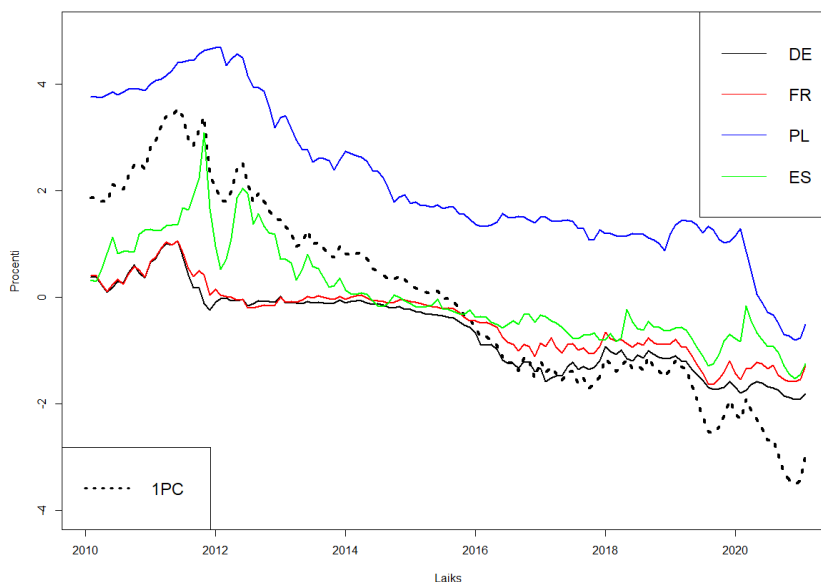
3.1.tabula

Katra modeļa autora ēnu procentu likmju galveno komponentu analīze izskatītajām valstīm

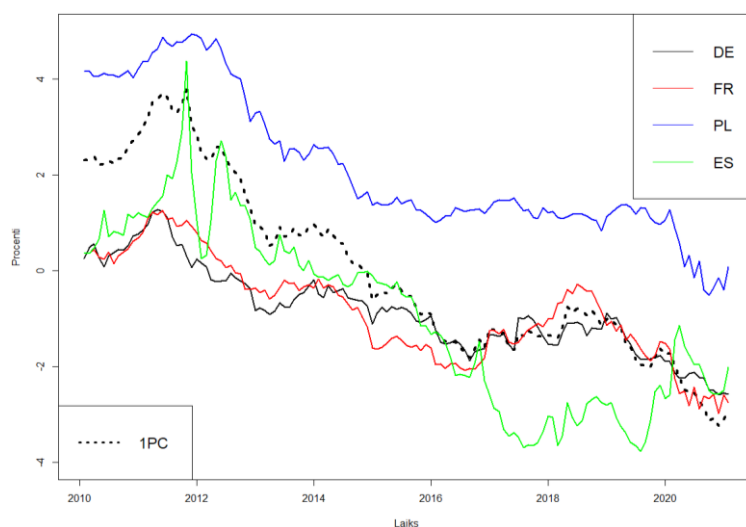
	PC1	PC2	PC3	PC4
M.D.Bauera un G.D. Rudenbuša makro faktoriem				
Izkliedes proporcija	0.8915	0.0881	0.01757	0.0028
Kumulatīva proporcija	0.8915	0.9796	0.9972	1.00000
V.Ajevskas procentu likmes modelis ar makro faktoriem				
Izkliedes proporcija	0.9242	0.0383	0.0197	0.0178
Kumulatīva proporcija	0.9242	0.9625	0.9822	1.00000
L.Krippnera procentu likmes modelis				
Izkliedes proporcija	0.8825	0.0618	0.0525	0.0032
Kumulatīva proporcija	0.8825	0.9444	0.9968	1.00000
V.Ajevskas procentu likmes modeļa (tikai nenovērojami faktori)				
Izkliedes proporcija	0.8875	0.0662	0.0435	0.0028
Kumulatīva proporcija	0.8875	0.9537	0.9972	1.00000

Apskatot galveno komponentu analīzes rezultātus, attēlotos 3.1 tabulā, var redzēt, ka pastāv neliela atšķirība starp to, cik daudz izskaidro pirmais faktors vienā modelī salīdzinājuma ar cita autora modeli. Visvairāk pirmais faktors izskaidro ēnu procentu likmes kustību starp valstīm V.Ajevskas modelī ar makroekonomiskiem faktoriem, kas arī sastāda 92,4%. Vismazāk pirmais faktors izskaidro ēnu procentu likmes kustību starp valstīm L.Krippnera modelī, kas arī sastāda 88,25%. Pēc galveno komponentu analīzes var secināt, ka ēnu procentu likmes dinamikas kustību pirmais faktors labāk izskaidro modeļos ar makroekonomiskiem faktoriem. Kas var norādīt, ka galvenais faktors ir saistīts ar visas Eiropas Savienības makroekonomisko stāvokli. Neskatoties uz atšķirībām, var pieņemt, ka visos modeļos pirmais faktors izskaidro aptuveni 90% ēnu procentu likmes kustības. Kas nozīmē to, ka pastāv faktors, kas izskaidro uz 90% no visas ienesīguma likmes kustības. Šāds faktors varētu būt ECB monetārā politika, kas nosaka stimulēšanas pasākumus, makroekonomisko faktoru mērķus, zemāko procentu likmi u.t.t. Izejot no tā, var secināt, ka ECB monetārā politika ir efektīva un visu valstu obligāciju ienesīgumi reaģē līdzīgi uz ECB pieņemtajiem lēmumiem.

Apskatot četru valstu grafisko modeļu ēnu procentu likmes, var redzēt, ka pirmās komponentes dinamika attēlo vidēji visas ēnu procentu likmes.

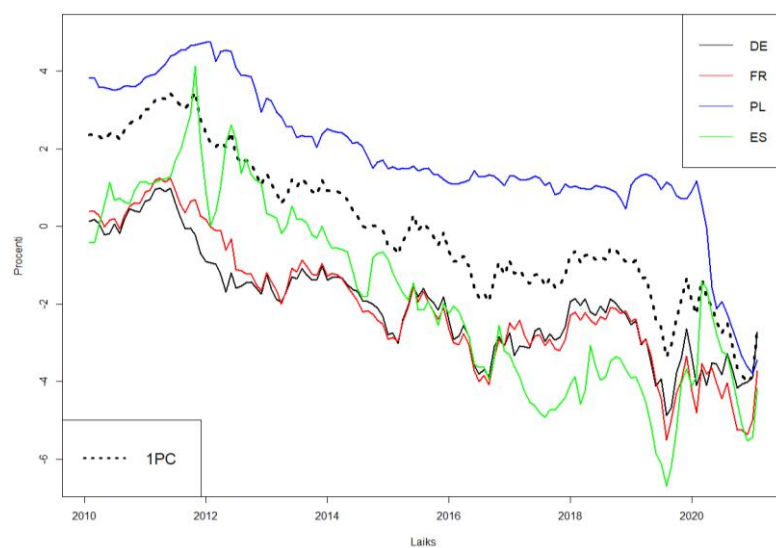


3.2.att. M.D.Bauera un G.D. Rudenbuša modeļa ēnu procentu likmes un pirmā komponente



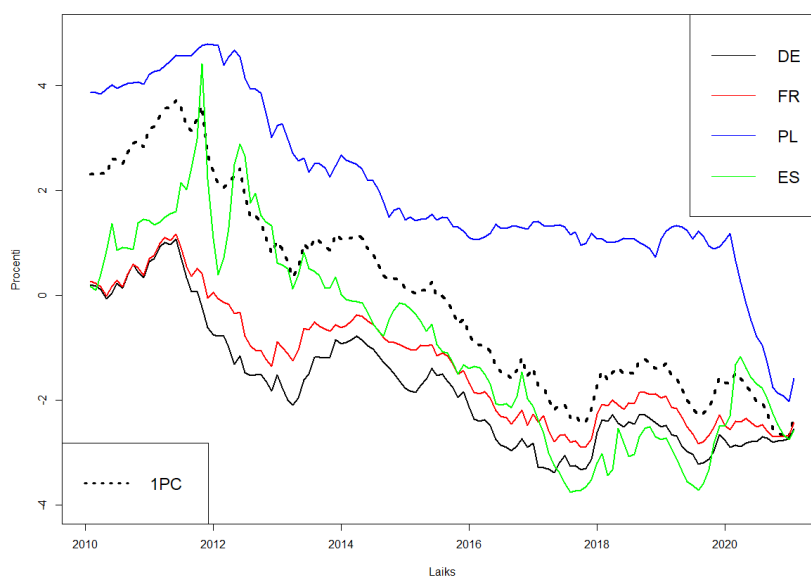
3.3.att. V.A makro modeļa ēnu procentu likmes un pirmā komponente

Salīdzinot makroekonomiskus modeļus ar modeļiem, kur tika izmantoti tikai nenovērojami faktori var pamanīt, ka galvenās komponentes analīzes pirmais faktors uzguļas uz Vācijas un Francijas ēnu procentu likmi, tikmēr modeļiem ar tikai nenovērojamiem faktoriem pirmais faktors ietur noteiktu starpību visas laika rindas garumā.



3.4.att. L.Krippnera modeļa ēnu procentu likmes un pirmā komponente





3.5.att. V.A. modeļa ēnu procentu likmes un pirmā komponente

Pēc dotajiem 3.2, 3.3, 3.4 un 3.5 attēliem var novērot, ka pirmā komponente sākumā vairāk, apraksta Polijas un Spānijas ēnu procentu likmes kustību. Pietuvojoties komponentei nulles robežai, tā uzreiz kustās pēc Vācijas un Francijas ēnu procentu likmes dinamikas. Otrā, trešā un ceturrtā komponente visos modeļos svārstās nebūtiski ap nulli un nes pietiekoši maz informācijas.

Papildus pievēršot uzmanību grafikiem, var redzēt, ka Francijas un Vācijas procentu likmes kustības dinamika visiem modeļiem ir ļoti līdzīga, kas arī paskaidro kāpēc pirmais faktors kustās līdzīgi Vācijas un Francijas ēnu procentu likmei.

### 3.2. Procentu likmes modeļu un to parametru interpretācija

Iepriekšējā nodaļā 2.2 tika pielietoti triju autoru četri dažādi modeļi, kam ir sava līdzīga uzbūve, bet dažāda pieeja termiņstruktūras novērtēšanai. Visi modeļi sastāv no parametriem, kas raksturo nenovērojamo vai novērojamo faktoru kustību. Novērtējot termiņstruktūru rezultātā, tika iegūta ēnu procentu likme un parametri, kas raksturo termiņstruktūras dinamikas attīstību laikā. Šī informācija ir ļoti noderīga, lai prognozētu nākotnes izmaiņas un dinamiku, kas savukārt prognozēs ekonomikas un finanšu tirgus tendences.

#### 3.2.1. Procentu likmes termiņstruktūras dinamikas novērtēšana

Apskatot visu procentu likmes dinamiku atkarībā no laika, var redzēt, ka visu procentu likmju trends ir lejupvērstis, līdz procentu likme sasniedz zemāko robežu. Sasniedzot īstermiņa procentu likmei zemāko robežu ilgtermiņa procentu likme arī tiecas samazināties līdz zemākai

robežai, samazinoties arī termiņstruktūras slīpumam un spredam. Apskatot modeļus, var redzēt, ka katras valsts modelim ēnu procentu likme nedaudz atšķiras, bet lielākoties visi modeļi labi apraksta ēnu procentu likmes dinamiku, kas sakrīt visiem modeļiem. Atšķirības lielākoties veidojas no modeļa jutīguma un zemākas robežas definīcijas, piemēram, modeļi tikai ar nenovērojamiem faktoriem zemāka robeža ir mainīga, bet ar makro faktoriem zemāka robeža ir fiksēta.

3.6.tabula

Ēnu procentu likmes un termiņstruktūras virziena prognoze dažādām Eiropas Savienības valstīm pēc dažādiem modeļiem

	L.Krippnera		V.A (2 faktori)		M.D.Bauera un G.D. Rudenbuša		V.A makro	
	SSR	Y	SSR	Y	SSR	Y	SSR	Y
Polija	D	U	D	U	D	D	D	D
Vācija	U	U	N	U	N	U	D	N
Spānija	U	N	U	D	N	D	D	D
Francija	U	U	N	N	U	U	N	D
Latvija	U	U	U	U	U	U	U	U

Y – termiņstruktūra,

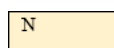
SSR – ēnu procentu likme,



- Prognoze, ka vērtības samazināsies,



- Prognoze, ka vērtības pieaugs,

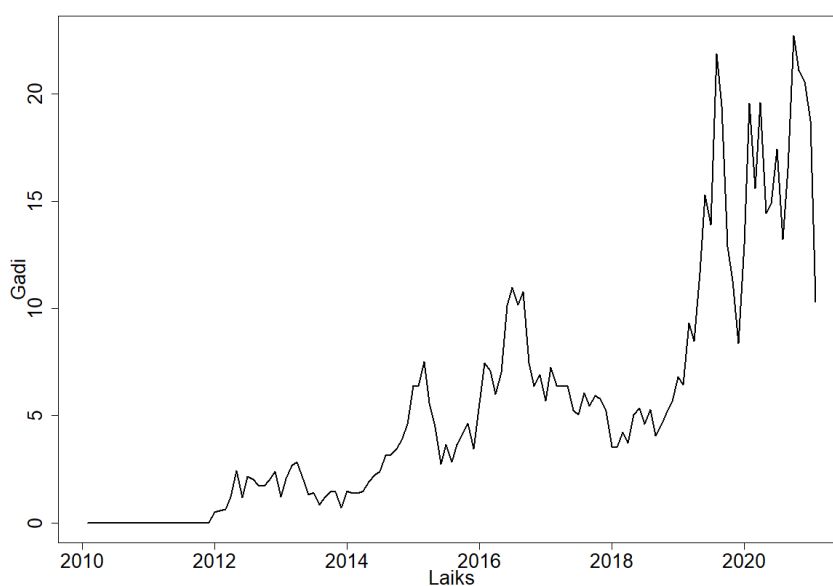


- Prognoze, ka vērtības paliks bez izmaiņām.

Pēc 3.6 tabulas var novērot, ka prognozes dažādiem modeļiem arī atšķiras. Šajā tabulā SSR nozīmē ēnu procentu likmi un Y termiņstruktūra. D nozīmē, ka ēnu procentu likme samazināsies, pie termiņstruktūras D nozīmē, ka termiņstruktūras slīpums samazināsies. U nozīmē pretēju D, ka ēnu procentu likme pieaugs un termiņstruktūra paliks platāka, kas arī nozīmē, ka spreds palielināsies. N nozīmē, ka ēnu procentu likme nemainīsies un pie termiņstruktūras tas nozīmē, ka termiņstruktūra nemainīsies. Apskatot katras valsts prognozi, var redzēt, ka pārsvarā tiek gaidīts, ka ēnu procentu likmes pieaugs un termiņstruktūra paliks platāka. Jāņem vērā, ka nevienas valsts obligāciju īstermiņa ienesīgumos netiek prognozēts

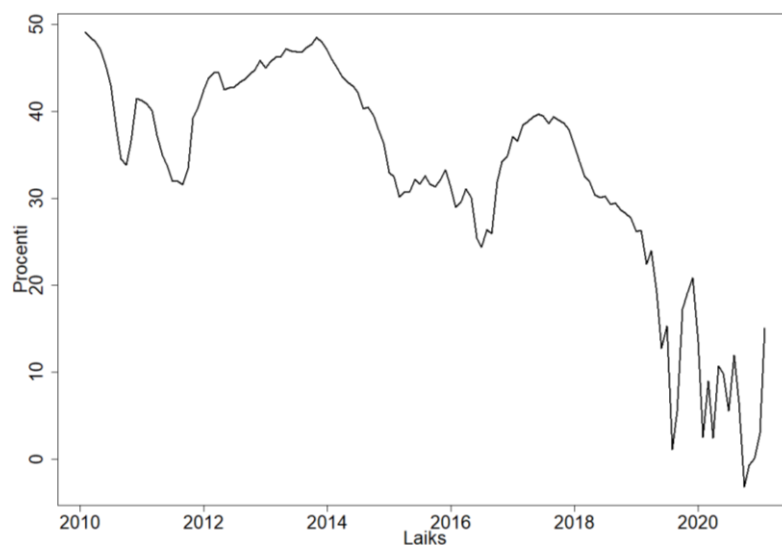
procentu likmes pieaugums. Līdz ar to termiņstruktūras paplašināšana tiek prognozēta, pateicoties ilgtermiņa procentu likmes pieaugumam.

Tā kā Vācijas obligāciju ienesīgumus var uzskatīt par visdrošākajiem un pieņemt kā etalonu citu valsts ienesīgumiem, tad šīm obligācijām darba autors izlēma apskatīt papildus kritērijus, ko iespējams iegūt novērtējot termiņstruktūru. Izmantojot L.Krippnera iegūto modeļa rezultātus, nenovērojamus faktorus un vidējo atgriešanas ātrumu līdz zemākai robežai, darba autors analizēja tādas rādītājus, kā ēnu procentu likmes laiku līdz tā atgriezīsies līdz zemākai robežai un efektīvas monetāras stimulēšanas mēru.



3.7. att. Vācijas ēnu procentu likmes atgriešanas laiks līdz zemākai robežai

Pēc 3.7 attēla var redzēt, ka ēnu procentu likme var atgriezties līdz zemākai robežai aptuveni desmit gadu laikā. Rādītājs tiek rēķināts pēc iepriekš izskatītās (1.18) formulas, kur tiek izmantoti sekojošie faktori kā: līmenis, slīpums un vidējais atgriešanas ātrums uz vidējo vērtību. Samazinoties visiem faktoriem, ēnu procentu likmes laiks līdz tā atgriezīsies līdz īstermiņa procentu likmei palielinās, šī tendence ir novērojama pretēji procentu likmes samazinājumam. Neskatoties pēdējo mēnešu kustību tendenci, attēlā 3.7 attēlā var redzēt, ka laiks strauji samazinās, kas parāda, ka līmenis un slīpums pieaug. Šis rādītājs parāda, kā Vācijas īstermiņa obligāciju ienesīgumi, visticamāk, pieaugs, virs zemākas robežās ne ātrāk, kā pēc desmit gadiem. Kas arī norāda, ka Vācijas ekonomika sasniegs stabilu ekonomisku izaugsmi, kad būs nepieciešami papildus ierobežojošie pasākumi ne ātrāk, kā pēc desmit gadiem.



3.8. att. Vācijas efektīva monetārā stimulēšana

Pēc 3.8 attēlā dotā rādītāja var secināt, cik efektīvi tiek pielietota monetārā stimulēšana. Šis rādītājs parāda, kad ir nepieciešams palielināt vai samazināt monetārās stimulēšanas pasākumus. Apskatot (1.19) un (1.20) formulas var redzēt, ka rādītājs ir atkarīgs no visiem trim faktoriem, kuri tiek iegūti modelī: līmenis, slīpumus, vidējais atgriešanas ātrums un vēl no papildu rādītāja, kā laiks līdz ēnu procentu likme sasniegs īstermiņa procentu likmi. Jo mazāki pirmie trīs rādītāji, jo ilgāk ienesīguma likme būs pie zemākas robežas. Šim rādītājam nav noteiktas vērtības, kas apzīmē, ka monetārā politika ir efektīva, bet savukārt, ja likme kļūst negatīva vai tuvu nullei, tas gan parāda, ka nepieciešami papildus stimulēšanas pasākumi. Šo rādītāju labāk analizēt apskatot pagātnes vērtības un tendenci, kuru var salīdzināt ar tagadnes vērtībām. Pēc 3.8 grafika var redzēt, ka iepriekš tika novērota monetārās politikas efektivitātes lejupslīde, ko arī var redzēt pēc procentu likmes tendences. Neskatoties uz to, pēdējo mēnešu tendence parāda monetārās stimulēšanas efektivitātes pieaugumu, kas iespējams tiek sekmēts ar investoru gaidām par pandēmijas izbeigšanu un ar ECB monetāriem pasākumiem ekonomikas atveseļošanai.

Apskatot visus rezultātus kopumā, var secināt, ka tuvākajā laikā ēnu procentu likme paliks zem zemākas robežas. Īstermiņa procentu likme paliks pie zemākas robežas visām apskatītajām valstīm, darba autors pieņem, ka arī pārējās Eiropas Savienību valstīs būs līdzīga situācija. Ilgtermiņa ienesīgumiem pastāv tendence pieaugt, paplašinot termiņstruktūru un norādot, ka potenciāli investori pēc vairākiem gadiem sagaida procentu likmes pieaugumu visos laikos līdz dzēšanai. To arī apstiprina papildus izskatītie rādītāji, kurus var novērot 3.7

un 3.8 attēlā. Šie rādītāji parāda, ka laiks tiecas strauji samazināties un monetārā stimulēšana paliek efektīvāka.

### **3.2.2. Makroekonomisko faktoru attīstība**

2.1. nodaļā tika analizēts, ka procentu likme ir atkarīga no makroekonomiskajiem faktoriem un otrādi. Darba autors vairāk pievērš uzmanību spreadam, kas tika izskatīts iepriekš, pēc lineāras regresijas var secināt, ka spreda palielināšanos nozīmē inflācijas pieaugumu. Apskatot procentu likmes termiņstruktūras iegūtās prognozes, var redzēt, ka termiņstruktūra paliek platāka, kas nozīmē, ka spreds paliek lielāks. Līdz ar to spreda palielināšanas var būt kā rezultāts, ka investori sagaida tuvākajā laikā inflācijas pieaugumu. Ņemot vērā esošo situāciju valstīs, kad tūrisms ir pilnīgi apstādināts, tirdzniecība ir daļēji ierobežota un cilvēkiem veidojas uzkrājumi. Darba autors secina, ka pēc pandēmijas būs liels pieprasījums, kas mainīs pieprasījuma un piedāvājuma līdzsvaru un stimulēs cenu pieaugumu.

Tā kā ekonomiskie procesi nenotiek ļoti strauji, tad pēc inflācijas pieauguma var gaidīt centrālās bankas ierobežojošās darbības, lai kontrolētu ekonomikas tempu, un nepieļaut hiperinflāciju. Šīm nolūkam procentu likmes var celties, kas, protams, atstās lielu ietekmi uz visu ekonomiku, cenām un investoru attieksmi pret risku. Var pieņemt, ka inflācijai un procentu likmei pieaugot, pieaugs arī investoru skaits, kuri vēlēšies pasargāt sevi pret inflāciju un procentu likmes pieaugumu, tādējādi akciju tirgi kristīsies un obligāciju cenas samazināsies. Apskatot bezdarba līmeni, tad visticamāk līdz procentu likmes tiks palielinātas, bezdarba līmenis turpinās krist, bet pēc procentu likmes pieauguma bezdarbs palielināsies, kas ir saistīts ar naudas vērtību palielināšanos.

Atskatoties uz spreda analīzi, kas tika veikta 2.1 nodaļā, var secināt, ka inflācijas tempi visās valstīs varētu būt līdzīgi un spreda izmaiņās arī. Kamēr īstermiņa procentu likme ir pie zemākas robežas, tikmēr spreda izmaiņas cieši korelē, pat Polijai var gaidīt līdzīgu spreda izmaiņu. Pieņemums, ka, palielinoties īstermiņa procentu, likmei virs zemākas robežas, spreda atšķirība var būt lielāka, to var paskaidrot ar inflācijas kontrolēšanas spējām katrā valstī, papildus arī spēlē lomu kredītreitinga novērtējums un obligāciju likviditāte. Papildus jāpatur prātā, vērtējot nākotnes gaidas, ka valstu kredītreitings var mainīties, kas var izraisīt straujas izmaiņas visā termiņstruktūrā. Pie situācijas, kad kādai valstij pasliktināsies kredītreitings, ir jāreķinās ar termiņstruktūras nobīdi un līdz ar to ietekmi uz makroekonomiskiem procesiem.

### 3.2.3. Izmantoto modeļu apskats

Darba ietvaros tika pielietoti četri ēnu procentu likmes modeļi, divi tikai ar nenovērojamiem faktoriem un divi gan ar nenovērojamiem, gan ar novērojamiem faktoriem. Lai gan visi modeļi ir affīnes struktūras, optimālo parametru atrašanai tika izmantotas tās pašas metodes: paplašinātais kalmana filtrs un maksimālas ticamības novērtēšanas metode. Katra modeļa optimizācijas laiks arī atšķīrās, jo modeļa uzbūve ir dažāda. Modeļa atšķirību var izskaidrot pēc katra autora sākuma pieņēmumiem.

Darbā tika izmantoti V.Ajevskas divi modeļi: tikai ar nenovērojamiem faktoriem un ar makro faktoriem. Modeļu uzbūve ir līdzīga savā starpā, atšķiras tikai parametru daudzums un līdz ar to matricu dimensijas. Galvenais pieņēmums šo modeļu izveidē ir diskrēta laika stohastisks process, kas seko pirmās kārtas autoregresīvam procesam, kas arī tika apskatīts iepriekš šī darba teorijas daļā. Lai iegūtu nosacīto dispersiju un autokovariāciju nepieciešams veikt lielas darbības ar kovariācijas matricām, izmantojot nenovērojamus faktorus, kā rezultātā tiek iegūts sagaidāmās procentu likmes. Šī darbība ir ļoti komplicēta, tāpēc tā aizņem daudz laika veikt aprēķinus pat programmai. Tāpēc salīdzinot ar citu autoru modeļiem, šo modeļu optimizācijas bija laikietilpīgāka it īpaši modelim ar makroekonomiskiem faktoriem, kur ir četri faktori. Papildu problēma, ar ko saskarās darba autors, ir zemākas robežas definēšana, pie Vācijas obligācijas termiņstruktūras novērtēšanas, kur desmitgadīga procentu likme ir zem zemākas definētās robežas, modelis nebija spējīgs adekvāti novērtēt ēnu procentu likmes kustību. Šo problēmu atrisināju, definējot zemāku robežu, ka mazāku desmitgadīgo procentu likmi, kas bija ap -0.7%.

L.Krippnera modelis ar diviem nenovērojamiem faktoriem ir diezgan jūtīgs uz termiņstruktūras un zemākas robežas izmaiņām. Apskatoties visus iegūtos rezultātus pēc šī modeļa, var redzēt, ka salīdzinoši lielākas svārstības piemīt tieši šim modelim. Šī modeļa pamatā tika izmantots Ornstein-Uhlenbeka process, kurš tika diskretizēts un apvienojot to ar paplašināto, kalmana filtru ir iespējams iegūt modeļa parametrus, un nenovērojamus faktorus. Modeļa pielietošana ir pietiekoši ērta, optimizācija neaizņem būtiski daudz laika, kas padara šo modeļi pievilcīgu.

M.D.Bauera un G.D. Rudenbuša piedāvātais makro modelis, neskatoties uz parametru daudzumu, ir ļoti ātrs. Iemesls tam ir optimizācijas sadalīšana, piedāvātājā modelī, sākumā tiek optimizēti daži galvenie faktori, kam piemīt lielāka ietekme un vēlāk tiek optimizēti pārējie parametri, šāda pieeja būtiski samazināja skaitļošanas laiku. Vienīgais ierobežojums šī modeļa

izmantošanā ir programmatūras funkciju specifikācijas, tā kā modelis netika būtiski pārveidots un darbā tika izmantoti autora kodi, tad bija nepieciešamība mainīt funkciju ierobežojumus, lai iegūtu rezultātu.

Veidojot kopīgu apskatu par modeļiem, var secināt, ka, neskatoties uz modeļu dažādu pieeju, visi modeļi dod līdzīgu termiņstruktūras dinamikas aprakstu, kas dod pārliecību par rezultātu ticamību. Modeļu jūtīgums ir dažāds, bet tas ir arī pozitīvs faktors, jo tas dod iespēju salīdzināt ekonomisko lēmumu vai notikumu sekas no dažādu modeļu skatupunkta. Jūtīgums, iespējams, arī ietekmēja modeļu prognožu atšķirību. Problēma saistīta ar modeļu jūtīgumu varētu kalpot, kā nākotnes pētījuma virziens, kur varētu salīdzināt vairāku faktoru jūtīgumu dažādu autoru piedāvātajos modeļos.

## Secinājumi un priekšlikumi

Darba mērķis bija pielietot piemērotākos procentu likmes termiņstruktūras modeļus Eiropas Savienību valstu obligācijām, lai novērtētu nākotnes tendences ekonomikas attīstībā un obligāciju tirgū. Darba ietvaros autors pētīja, kāda ir ēnu procentu likme uz doto brīdi, kādas ir nākotnes gaidas attiecībā pret ēnu procentu likmi, kādas varētu būt nākotnes tendence attiecībā uz procentu likmes termiņstruktūru, kādas tendences var sagaidīt attiecībā uz makroekonomikas attīstību tuvākajā laikā un kādam periodam ir jāpaiet, lai ēnu procentu likme atgrieztos pie īstermiņa procentu likmes.

Ēnu procentu likmi var novērot grafiski 2.2 nodaļā. No iegūtiem rezultātiem var secināt, ka visu izskatīto valstu obligācijām ēnu procentu likme ir zem tās zemākas robežas, kas savukārt parāda, ka monetārā politika visās valstīs ir labvēlīga. Makroekonomiskie modeļi parādīja, ka ēnu procentu likme ir lielāka, ko var paskaidrot ar dažādiem modeļa zemākas robežas iestatījumiem, salīdzinājumā ar modeļiem, kur bija tikai nenovērojami faktori. Apskatot nākotnes prognozes attiecībā uz ēnu procentu likmi, var secināt, ka visām apskatītajām valstīm ēnu procentu likme būs zem zemākas robežas tuvāko gadu. Līdz ar to var negaidīt stingrāku monetāru politiku no ECB puses. Modeļi ar tikai nenovērojamiem faktoriem pārsvara prognozē arī ēnu procentu likmes palielināšanos, kad modeļi ar makroekonomiskiem faktoriem prognoze svārstās un ir mazliet atšķirīga no iepriekšējiem modeļiem. Apskatot termiņstruktūras nākotnes prognozes, var redzēt, ka slīpums palielināsies, kas nozīmē, ka ilgtermiņa procentu likme palielināsies. Īstermiņa procentu likme svārstīsies pie zemākas robežas, ko arī parādīja ēnu procentu likmes novērtēšana, ka ēnu procentu likme ir pietiekoši tālu no īstermiņa procentu likmes. Procentu likmes novērtēšana dod iespēju ne tikai novērtēt obligācijas cenu dinamiku, bet gan visas ekonomikas nākotnes tendences. Termiņstruktūras slīpuma palielināšanās nozīmē spreda palielināšanās, kas var liecināt par investoru gaidām par inflācijas pieaugumu un ekonomikas straujāku attīstību.

Pēc monetārās stimulēšanas efektivitātes aprēķiniem 3.8 attēlā var redzēt, ka stimulēšanas pasākumi kļūst efektīvāki, kas savukārt norāda uz ekonomikas straujāku izaugsmi un apstiprina secinājumus par nākotnes makroekonomiskās situācijas uzlabošanu. Pēc 3.7 attēlā redzamajiem aprēķiniem Vācijas obligācijām ēnu procentu likme var sasniegt īstermiņa procentu likmi aptuveni pēc desmit gadiem. Tā kā Vācijas procentu likme ir etalons, tad var pieņemt, ka uz to brīdi, kad Vācijas ēnu procentu likme sasniegs zemāko robežu, pārējo Eiropas



Savienības valstu obligāciju ienesīgumi būs virs zemākas robežās visos termiņstruktūras periodos. Līdz ar to balstoties uz analizējamajiem datiem, Eiropas Savienības atgūšana var aizņemt salīdzinoši ilgāku termiņu.

Papildus 3. nodaļā tika pievērsta uzmanību kopīgai tendencei, ka visām apskatītajām Eiropas Savienības dalībvalstīm ir kopīga obligāciju dinamika un pēc galveno komponentu analīzes var saprast, ka visai termiņstruktūrai piemīt tāds faktors, kas izskaidro 90% no procentu likmes termiņstruktūras. Pēc autora viedokļa tas norāda uz ECB monetārās politikas pieņemto lēmumu ietekmi uz visām Eiropas Savienības dalībvalstīm, kad visās valstīs tiek sasniegts līdzīgs rezultāts, kas atspoguļojas obligāciju ienesīguma dinamikā.

Nākotnes pētījumos būtu vēlams apskatīt papildu jautājumus. Viens no jautājumiem ir, kāds modelis būs piemērotāks un precīzāks ekonomiskā stāvokļa novērtēšanai un prognozei, cik jūtīgu modeli jāizmanto. Nākotnes pētījumā varētu iekļaut vairāku valstu obligāciju datus, lai iegūtu komplicētāku informāciju par Eiropas Savienības ekonomisko stāvokli. Būtu vērtīgi izpētīt Eiropas Savienībā ietilpstošās valstis, kuru valsts valūta atšķiras no eiro un cik liela valūtas riskam ir ietekme uz obligāciju tirgu vai otrādi. Papildus pie termiņstruktūras analīzes var iekļaut ilgāka laika obligācijas un salīdzināt rezultātus savā starpā, tādējādi varēs saprast, cik daudz informācijas nes sevī obligāciju ienesīgumi, kas ir ilgāki par desmit gadiem.

## Izmantotās literatūras un avotu saraksts

1. Ajevskis, V. A term structure of interest rates model with zero lower bound and the european central bank's non-standard monetary policy measures. *Latvijas banka*. 2016, pp.1-18.
2. Ajevskis, V. Dabiskā procentu likme: ar ēnu procentu likmes modeli iegūtā informācija. *Latvijas Banka*. 2018, lpp. 1-16.
3. Backus, D., Foresi, S., Telmer, C. Discrete - Time Models of Bond Pricing. *Salomon Smith Barney*. 1998, pp. 1-35.
4. Barrios, S., Iversen, P. Magdalena Lewandowska, Ralph Setzer. Determinants of intra-euro area government bond spreads during the financial crisis. Available: *European*
5. Bauer, M.D., Rudenbush, G.D. Monetary policy expectations at the zero lower bound. *Federal Reserves Bank of San Francisco*. 2015, pp.1-31.
6. Blanchard A. The Two-Factor Hull-White Model: Pricing and Calibration of Interest Rates Derivatives. [viewed 2 October 2020]. Available at: <https://www.math.kth.se/matstat/seminarier/reports/M-exjobb12/120220b.pdf> .
7. Bloomberg terminal
8. Bolder, D., J. Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation. *Bank of Canada*. 2001, pp. 1-69.
9. Brigo, D., Mercurio, F. *Interest Rate Models – Theory and Practice*. Springer finance, 2006. pp. 1-981. ISBN 978-3-540-22149-4.
10. Cynthia, J. W., Dora, F. X. Measuring the Macroeconomic Impact of Monetary Policy at the Zero Lower Bound. *Working Paper No. 13-77*. 2014, pp.1-50.
11. *Commission*. 2009, pp.1-26.
12. *Credit Rating for Euro Area Member States and European supranational institutions*. [online]. [viewed 14. january 2021]. Available from: [https://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/BRIE/2020/651351/IPOL\\_BRI\(2020\)651351\\_EN.pdf](https://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/BRIE/2020/651351/IPOL_BRI(2020)651351_EN.pdf)
13. Filipovic, D. *Term-Structure models a graduate course*. Springer Dordrecht Heidelberg London New York 2009, pp. 1-256.

14. *Guide to Business in Spain*. [online]. [viewed 24 January 2021]. Available from: <https://www.guidetobusinessinspain.com/en/1-spain-an-attractive-country-for-investment/1-5-economic-structure/>
15. Hemert, O.V. Household interest rate risk management. *Real estate economic*. Vol.38. 2010, pp. 467-505.
16. Hull, J.C. *Options, futures and other derivatives*. University of Toronto, 2012, pp. 1-841. ISBN 978-0-13-216494-8.
17. Yougfeng, Wu., Liang, X. Vasicek model with mixed-exponential jumps and its applications in finance and insurance. *Advances in Difference Equation*. 2018, pp.2-15.
18. Krippner L., *Zero lower bound term structure modeling. A practitioner's guide*. Palgrave Macmillan. 2015, p.36. ISBN 978-1-349-68123-5.
19. Krippner, L. The Derivation and Application of a Theoretically and Economically Consistent Version of the Nelson and Siegel Class of Yield Curve Models. *Waikato. Researchgateway*. 2007, pp.1-209.
20. Lian, C., Ma, Y., Wang, C. Low interest rate and risk-taking: evidence from individual investment decisions. *Oxford University Press on behalf of The Society for Financial Studies*. 2018, pp. 2108-2148.
21. Maes, K. Modeling the term structure of interest rates: where do we stand? *National Bank of Belgium*. 2004, pp. 1-45.
22. McCoy, E., Clemens, U. A Calibration of the Shadow Rate to the Euro Area Using Genetic Algorithms. *European Economy Discussion Papers*. 2017, pp.1-30.
23. Nowman, K. B. Estimation of one-, two- and three-factor generalized Vasicek term structure models for Japanese interest rates using monthly panel data. *Applied Financial Economics*. 2011, pp. 1069–1078.
24. Ratanapakorn, O., Sharma, C.S. Dynamic analysis between the US stock returns and the macroeconomic variables. *Applied Financial Economics*. 2007, pp. 369-377.
25. Ren-raw, C., Louis, S. Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure: Estimates and Tests From a Kalman Filter Model. *Journal of Real Estate Finance and Economics*. Vol. 27. 2003, pp. 1-35.
26. Ringner, M. What is principal component analysis? *Nature publishing group*. Vol.26. 2008, pp.303-304.

27. Rudebush, G.D., Diebold, F.X., Christensen, H.E. The affine arbitrage-free class of Nelson-Siegel term structure models. *Federal Reserved Bank of San Francisco*. 2007, pp. 1-41.
28. Statista. [online]. [viewed 24 January 2021]. Available from: <https://www.statista.com/statistics/375605/poland-gdp-distribution-across-economic-sectors/>
29. Statista. [online]. [viewed 24 January 2021]. Available from: <https://www.statista.com/statistics/375583/latvia-gdp-distribution-across-economic-sectors/>
30. Subrahmanyam, M. G. The Term Structure of Interest Rates: Alternative Approaches and Their Implications for the Valuation of Contingent Claims. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*. 1996, pp.7-28.
31. Tarelli, A. No-arbitrage one-factor term structure models in zero- or negative-lower-bound environments. *Investment Management and Financial Innovations*. Vol.17. 2020, pp. 197-212.
32. Valsts kase. [Skatīts 14. janvārī 2020]. Pieejams: <https://www.kase.gov.lv/jaunumi/latvijas-kreditreitingu-paaugstina-vesturiski-visaugstakaja-limeni#article-text>
33. Vo, L.H. Application of Kalman Filter on Modelling Interest Rates. *Journal of Managenemt Sciences*. V.1. 2014, pp. 1-15.
34. Клейнер, Г.Б. Экономико-математическое моделирование и экономическая теория. *Журнал -Экономика и математические методы*, 2001 стр.1-25.

## Pielikums

```
#Nepieciešamas pakotnes
lib<-c('numDeriv','FKF','pbivnorm','xtable','forecast','zoo','readxl','pracma','MASS','expm',
'vars','matrixcalc','stats')
lapply(lib,require,character.only=TRUE)
#Datu importēšana, pēc read_excel() komandas tika eksportēti visi nepieciešamie faili
yield<- read_excel("C:/Users/Aleksejs/Desktop/DE_yield.xlsx", sheet="Sheet2") #DE
macro<- read_excel("C:/Users/Aleksejs/Desktop/DE_macro.xlsx", sheet="Sheet1")#DE_macro_parametr
#Datu transformēšana, ja ir nepieciešams pēc modeļa
yield<-yield[,-1]
yield<-yield*100

#Prognozēšanas funkcijas
f_yield<-function(xT, sum1, yield,RR, Y){ #tikai ar nenovērojamiem parametriem
xT1<-ts(data=xT, start=1, end=NROW(xT[,1]))
N<-NROW(yield[,1])
var<-VAR(xT1, p=1,type=c("none"))
forecast<-predict(var,n.ahead=10)
data<-forecast$fcst
S1<-data$Series.1[,1]
S2<-data$Series.2[,1]
xT1<-matrix(data=c(S1, S2), ncol=2, nrow=10)
Error_up<-data.frame(data$Series.1[,3], data$Series.2[,3])
Error_lo<-data.frame(data$Series.1[,2], data$Series.2[,2])
new_error_up<-Error_up[,1]+Error_up[,2]
new_error_lo<-Error_lo[,1]+Error_lo[,2]
sum2<-matrix(data=0, nrow=10, ncol=1)
for( i in 1:10){
  sum2[i]<-xT1[i,1]+xT1[i,2]
}
sum2<-ts(sum2,start=c(2021,3), end=c(2021,12),frequency=12 )
new_error_lo<-ts(new_error_lo,start=c(2021,3), end=c(2021,12),frequency=12 )
new_error_up<-ts(new_error_up,start=c(2021,3), end=c(2021,12),frequency=12 )
```

```

plot(ts(sum1, start=c(2010,2), end=c(2021,2),frequency=12), type="l",col="red", xlim=c(2010.2,(2022.5)),
      ylim=c(-2,max(yield[,length(yield[2,]))+1), main="V.A. procentu likmes modelis, DE", #L.Krippnera
      xlab="Laiks", ylab="Procenti", lwd=2)
lines(ts(yield[,1],start=c(2010,2), end=c(2021,2),frequency=12), col="blue", lwd=2)
lines(ts(yield[,8],start=c(2010,2), end=c(2021,2),frequency=12), col="blue4")
lines(ts(yield[,7],start=c(2010,2), end=c(2021,2),frequency=12), col="blue3")
lines(ts(yield[,6],start=c(2010,2), end=c(2021,2),frequency=12), col="blue2")
text(2010.2,yield[1,8]+0.1, "10G")
text(2010.2,yield[1,7], "7G")
text(2010.2,yield[1,6], "5G")
text(2010.2,yield[1,1], "3M")
if(Y==TRUE){
  lines(ts(yield_forecast[,1],start=c(2021,03), end=c(2021,12),frequency=12), lty=4)
  lines(ts(yield_forecast[,6],start=c(2021,03), end=c(2021,12),frequency=12), lty=4)
  lines(ts(yield_forecast[,7],start=c(2021,03), end=c(2021,12),frequency=12), lty=4)
  lines(ts(yield_forecast[,8],start=c(2021,03), end=c(2021,12),frequency=12), lty=4)
}
lines(sum2*RR, col="green", lty=2, lwd=3)
lines(new_error_lo*RR, col="orange", lty=4, lwd=2)
lines(new_error_up*RR, col="orange", lty=4, lwd=2)
legend("topright", c("10G", "7G", "5G", "3M", "Enu likme"), col=c("blue4", "blue3", "blue2", "blue", "red"),
      lty=c(1,1,1,1,1), lwd=c(1,1,1,2,2))
legend("bottomleft",c("E Prognoze", "T prognoze", "Robezas"), col=c("green", "black", "red"),lty=c(4,4,4),
      lwd=c(2,1,1))
forecast_res<-list(xT1, sum2)#, yield_forecast
}
f_yield_m<-function(xT, s, yield,RR, Y, R){ #modelim ar makro datiem
  xT1<-ts(data=xT, start=1, end=NROW(xT[,1]))
  N<-NROW(yield[,1])
  var<-VAR(xT1, p=1,type=c("none"))
  forecast<-predict(var,n.ahead=10)
  data<-forecast$fcst
  S1<-data$Series.1[,1]
  S2<-data$Series.2[,1]

```

```

S3<-data$Series.3[,1]
S4<-data$Series.4[,1]
xT1<-matrix(data=c(S1, S2, S3,S4), ncol=4, nrow=10)
sum2<-matrix(data=0, nrow=10, ncol=1)
Error_up<-data.frame(data$Series.1[,3], data$Series.2[,3], data$Series.3[,3],data$Series.4[,3])
Error_lo<-data.frame(data$Series.1[,2], data$Series.2[,2], data$Series.3[,2],data$Series.4[,2])
if (R==0){
new_error_lo<-t(RR*(t(bet_g)%*%t(as.matrix(Error_lo))))
new_error_up<-t(RR*(t(bet_g)%*%t(as.matrix(Error_up))))
sum2<-t(RR*(t(bet_g)%*%t(xT1)))
}else{
new_error_lo<-t(RR*(t(rho)%*%t(as.matrix(Error_lo))))+rho0
new_error_up<-t(RR*(t(rho)%*%t(as.matrix(Error_up))))+rho0
sum2<-t(RR*(t(rho)%*%t(xT1)))+rho0
}
sum2<-ts(sum2,start=c(2021,3), end=c(2021,12),frequency=12 )
new_error_lo<-ts(new_error_lo,start=c(2021,3), end=c(2021,12),frequency=12 )
new_error_up<-ts(new_error_up,start=c(2021,3), end=c(2021,12),frequency=12 )
if (R==1){
plot(ts(sss, start=c(2010,1), end=c(2021,2),frequency=12),
type="l",col="red", xlim=c(2010.1, (2022.5)),
ylim=c(-2,max(yield[,length(yield[2,])])),
main="Rudendush procentu likmes modelis, DE",#L.Krippnera
xlab="Laiks", ylab="Procenti", lwd=2)
}else{
plot(ts(as.vector(s), start=c(2010,1), end=c(2021,2),frequency=12), type="l",col="red",
xlim=c(2010.1, (2022.5)), lwd=2, ylim=c(min(new_error_lo),max(yield[,length(yield[2,])])+0.5),
main="V.A procentu likmes modelis, FR",xlab="Laiks", ylab="Procenti")
}
lines(ts(yield[,1],start=c(2010,2), end=c(2021,2),frequency=12), col="blue", lwd=2)
lines(ts(yield[,8],start=c(2010,2), end=c(2021,2),frequency=12), col="blue4")
lines(ts(yield[,7],start=c(2010,2), end=c(2021,2),frequency=12), col="blue3")
lines(ts(yield[,6],start=c(2010,2), end=c(2021,2),frequency=12), col="blue2")
text(2010.2,yield[1,8], "10G")

```

```

text(2010.2,yield[1,7], "7G")
text(2010.2,yield[1,6], "5G")
text(2010.2,yield[1,1], "3M")
if (Y==TRUE){
  lines(ts(yield_forecast[,1],start=c(2021,03), end=c(2021,12),frequency=12), lty=4)
  lines(ts(yield_forecast[,6],start=c(2021,03), end=c(2021,12),frequency=12), lty=4)
  lines(ts(yield_forecast[,7],start=c(2021,03), end=c(2021,12),frequency=12), lty=4)
  lines(ts(yield_forecast[,8],start=c(2021,03), end=c(2021,12),frequency=12), lty=4)
}
lines(sum2, col="green", lty=2, lwd=3)
lines( new_error_lo, col="orange", lty=4, lwd=2)
lines( new_error_up, col="orange", lty=4, lwd=2)
legend("topright", c("10G", "7G", "5G", "3M", "Enu likme"),
      col=c("blue4", "blue3", "blue2", "blue", "red"), lty=c(1,1,1,1,1), lwd=c(1,1,1,2,2))
legend("bottomleft",c("E Prognoze", "T prognoze", "Robezas"), col=c("green", "black", "red"), lty=c(4,4,4),
lwd=c(2,1,1))
forecast_res<-list(xT1, sum2)#, yield_forecast)
}

```

##### M.D.Bauera un G.D. Rudenbuša makro modelis

#Sākumā iet funkcijas vēlāk darbs ar datiem

##funkcijas

```

load.macro.shadow<-function(flag.zlb, flag.macro, rmin=(-0.5), flag.fitted=TRUE) {
  model <- loadPars(flag.macro)

  kalman <- jls.kalman.zlb(Y, M.o, model$cL, K0P=model$K0P, K1P=model$K1P, Sigma=model$Sigma,
rho0=model$rho0, rho1=model$rho1, K0Q=model$K0Q, K1Q=model$K1Q, mats, rmin, dt=1,
sigma.e=model$sigma.e)

  model$cP <- kalman$x.tt
  model$llk <- -sum(kalman$llk)

  T <- nrow(Y)

  model$s <- rep(model$rho0.cP, T) + model$cP %*% model$rho1.cP
  model$r <- pmax(rmin, model$s)

  model$Y.shadow <- rep(1,T) %*% model$A + model$cP %*% model$B

  model$Y.hat <- getY(model$cP, model$rho0.cP, model$rho1.cP, model$muQ, model$PhiQ, model$Sigma,
rmin)

```



```

model$flag.zlb <- flag.zlb
model$flag.macro <- flag.macro
if (flag.zlb)
  model$rmin <- rmin
return(model)
}

load.macro.affine<-function(flag.zlb, flag.macro, rmin=(-0.5), flag.fitted=TRUE) {
  model <- loadPars(flag.macro)

  kalman <- jls.kalman(Y, M.o, model$W, model$cL, rinfQ=model$rinfQ, lamQ=model$lamQ,
gam0=model$gam0, gam1=model$gam1, KOP=model$KOP, KIP=model$KIP, Sigma=model$Sigma, mats,
dt=1, sigma.e=model$sigma.e)

  model$cP <- kalman$x.tt
  model$lIk <- -sum(kalman$lIk)
  T <- nrow(Y)
  model$r <- rep(model$rho0.cP, T) + model$cP %*% model$rho1.cP
  model$Y.hat <- rep(1,T) %*% model$A + model$cP %*% model$B

  loads.rn <- gaussian.loadings(mats, model$mu, model$Phi-diag(model$cN), model$Omega, model$rho0.cP,
model$rho1.cP)

  model$Arn <- loads.rn$A; model$Brn <- loads.rn$B
  model$Y.rn <- rep(1,T)%*%model$Arn + model$cP%*%model$Brn
  model$Y.tp <- model$Y.hat - model$Y.rn
  model$flag.zlb <- flag.zlb
  model$flag.macro <- flag.macro
  if (flag.zlb)
    model$rmin <- rmin
  return(model)
}

loadPars<-function(flag.macro=FALSE) {
  pars$W <- W
  if (ncol(W)!=ncol(Y))
    stop("W loaded from file does not have the same number of yield maturities as yield data in Y")
  if (flag.macro) {
    if (!("gam0" %in% names(pars)))
      stop("flag.macro is TRUE but no JLS parameters saved in file")
    pars$cL <- cL
  }
}

```

```

pars$cN <- cN
pars$cM <- cM
loads <- jls.loadings(W, pars$rinfQ, pars$lamQ, pars$gam0, pars$gam1, pars$Omega, mats, dt=1)
pars$A <- loads$A; pars$B <- loads$B
pars$muQ <- as.numeric(loads$K0Q)
pars$PhiQ <- loads$K1Q + diag(cN)
pars$mu <- pars$K0P
pars$Phi <- pars$K1P + diag(cN)
pars$K0Q <- as.numeric(loads$K0Q);
pars$K1Q <- loads$K1Q
} else {
  if (!("kinfQ" %in% names(pars)))
    stop("flag.macro is FALSE ")
  if ("cN" %in% load.list)
    pars$cN <- cN
  if ("N" %in% load.list)
    pars$cN <- N
  if (pars$cN != length(pars$lamQ))
    stop("Saved cN, error")
  loads <- jsz.loadings(W, diag(pars$lamQ), pars$kinfQ, pars$Omega, mats, dt=1)
  pars$A <- loads$AcP; pars$B <- loads$BcP
  pars$muQ <- as.numeric(loads$K0Q.cP)
  pars$PhiQ <- loads$K1Q.cP + diag(pars$cN)
  pars$K0Q <- as.numeric(loads$K0Q.cP);
  pars$K1Q <- loads$K1Q.cP
}
pars$rho0.cP <- as.numeric(loads$rho0)
pars$rho1.cP <- as.numeric(loads$rho1)
return(pars)
}
jls.kalman.zlb <- function(yields.o, M.o, cL, K0P, K1P, Sigma, rho0, rho1, K0Q, K1Q, mats, rmin, dt=1,
sigma.e, sigma.m, smoothing=FALSE) {
  require(numDeriv)
  T <- nrow(yields.o)

```

```

J <- ncol(yields.o)
cM <- ncol(M.o)
cN <- cL + cM
Omega <- Sigma %**% t(Sigma)
Phi <- K1P + diag(cN)
mu <- K0P
PhiQ <- K1Q + diag(cN)
muQ <- K0Q
Q <- Omega
Omega.e <- diag(J)*sigma.e^2
if (missing(sigma.m)) {
  Omega.M <- matrix(0, cM, cM)
} else {
  if (length(sigma.m)!=cM) stop("NROW(sigma.m) is wrong")
  Omega.M <- diag(sigma.m)^2
}
R <- rbind( cbind(Omega.e, matrix(0,J,cM)), cbind(matrix(0,cM,J), Omega.M) )
T <- dim(yields.o)[1]
x.tt <- matrix(NA, T, cN)
x.ttm1 <- matrix(NA, T, cN)
P.tt <- array(NA, c(T, cN, cN))
P.ttm1 <- array(NA, c(T, cN, cN))
x.ttm1[1,] <- solve(diag(cN) - Phi) %**% mu
P.ttm1[1,,] <- matrix( solve(diag(cN^2) - kronecker(Phi, Phi))%**%as.numeric(Q), cN, cN);
getY <- make.getY.Krippner(rho0, rho1, muQ, PhiQ, Sigma, rmin=rmin)
llk <- numeric(T)
for (t in 1:T) {
  H.Y <- jacobian(getY, x.ttm1[t,])#, method="simple") ###ja ir problemas tad method komentet
  if (any(is.na(H.Y))) {
    stop("Jacobian NaN ")
  }
  H.M <- cbind(diag(cM),matrix(0, cM, cL))
  H <- rbind(H.Y, H.M)
  V <- H %**% P.ttm1[t,,] %**% t(H) + R # MSFE, cN x cN

```

```

V.inv <- solve(V)
K <- Phi %*% P.ttm1[t,] %*% t(H) %*% V.inv # Kalman gain
eta.Y <- yields.o[t,] - getY(x.ttm1[t,])
eta.M <- M.o[t,] - x.ttm1[t,1:cM]
eta <- c(eta.Y, eta.M)
llk[t] <- -.5*log(det(V)) -.5 * t(eta) %*% V.inv %*% eta
x.tt[t,] <- x.ttm1[t,] + P.ttm1[t,] %*% t(H) %*% V.inv %*% eta
P.tt[t,,] <- P.ttm1[t,] - P.ttm1[t,] %*% t(H) %*% V.inv %*% H %*% P.ttm1[t,] #P_t|t
if (t<T) {
  x.ttm1[t+1,] <- mu + Phi %*% x.ttm1[t,] + K %*% eta # x_{t+1|t}
  P.ttm1[t+1,,] <- Phi %*% P.tt[t,,] %*% t(Phi) + Q # P_{t+1|t}
}
}
if (smoothing) {
  x.tT <- matrix(NA, T, cN)
  x.tT[T,] <- x.tt[T,]
  for (t in (T-1):1) {
    J.t <- P.tt[t,] %*% t(Phi) %*% solve(P.ttm1[t+1,,])
    x.tT[t,] <- x.tt[t,] + J.t %*% (x.tT[t+1,] - x.ttm1[t+1,])
  }
  return(list(llk=-llk, x.tt=x.tt, x.tT=x.tT))
} else {
  return(list(llk=-llk, x.tt=x.tt))
}
}

jls.kalman<-function(yields.o, M.o, W, cL, rinfQ, lamQ, gam0, gam1, K0P, K1P, Sigma, mats, dt, sigma.e,
sigma.m=NA, smoothing=FALSE) {
  T <- nrow(yields.o)
  J <- ncol(yields.o)
  cM <- ncol(M.o)
  cN <- cL + cM
  Omega <- Sigma %*% t(Sigma)
  Phi <- K1P + diag(cN)
  mu <- K0P

```

```

Q <- Omega
loads <- jls.loadings(W, rinfQ, lamQ, gam0, gam1, Omega, mats, dt)
Omega.e <- diag(J)*sigma.e^2
if (any(is.na(sigma.m))) {
  Omega.M <- matrix(0, cM, cM)
} else {
  if (length(sigma.m)!=cM) stop("NROW(sigma.m) is wrong")
  Omega.M <- diag(sigma.m)^2
}
G <- c(as.numeric(loads$A), rep(0, cM)) # (J+cM) x 1
H <- rbind(t(loads$B), cbind(diag(cM),matrix(0, cM, cL))) # (J+cM) x cN
R <- rbind( cbind(Omega.e, matrix(0,J,cM)), cbind(matrix(0,cM,J), Omega.M) ) # (J+cM) x (J+cM)
T <- dim(yields.o)[1]
x.tt <- matrix(NA, T, cN)
x.ttm1 <- matrix(NA, T, cN)
P.tt <- array(NA, c(T, cN, cN))
P.ttm1 <- array(NA, c(T, cN, cN))
x.ttm1[1,] <- solve(diag(cN) - Phi) %%% mu
P.ttm1[1,,] <- matrix( solve(diag(cN^2) - kronecker(Phi, Phi))%%as.numeric(Q), cN, cN);
llk <- numeric(T)
for (t in 1:T) {
  V <- H %%% P.ttm1[t,,] %%% t(H) + R # MSFE, cN x cN
  if (rcond(V)<1e-14) {
    return(list(llk=1000))
  }
  V.inv <- solve(V)
  K <- Phi %%% P.ttm1[t,,] %%% t(H) %%% V.inv # Kalman gain
  eta <- c(yields.o[t,], M.o[t,]) - G - H %%% x.ttm1[t,]
  llk[t] <- -.5*log(det(V)) - .5 * t(eta) %%% V.inv %%% eta
  x.tt[t,] <- x.ttm1[t,] + P.ttm1[t,,] %%% t(H) %%% V.inv %%% eta
  P.tt[t,,] <- P.ttm1[t,,] - P.ttm1[t,,] %%% t(H) %%% V.inv %%% H %%% P.ttm1[t,,] #P_t|t
  if (t<T) {
    x.ttm1[t+1,] <- mu + Phi %%% x.ttm1[t,] + K %%% eta # x_{t+1|t}
    P.ttm1[t+1,,] <- Phi %%% P.tt[t,,] %%% t(Phi) + Q # P_{t+1|t}
  }
}

```

```

}
}
if (smoothing) {
  x.tT <- matrix(NA, T, cN)
  x.tT[T,] <- x.tt[T,]
  for (t in (T-1):1) {
    J.t <- P.tt[t,] %*% t(Phi) %*% solve(P.ttm1[t+1,,])
    x.tT[t,] <- x.tt[t,] + J.t %*% (x.tT[t+1,] - x.ttm1[t+1,])
  }
  return(list(llk=-llk, x.tt=x.tt, x.tT=x.tT, A=loads$A, B=loads$B, K0Q=loads$K0Q, K1Q=loads$K1Q,
rho0=loads$rho0, rho1=loads$rho1))
} else {
  return(list(llk=-llk, x.tt=x.tt, A=loads$A, B=loads$B, K0Q=loads$K0Q, K1Q=loads$K1Q, rho0=loads$rho0,
rho1=loads$rho1))
}
}
init<-function(){
  if (dim(M.o)[2]!=2)
    stop("wrong number")
  cM <<- 2
  cN <<- cL+cM
  eig <- eigen(cov(Y))
  W <<- t(eig$vectors)
  WL <<- matrix(W[1:cL,], cL, length(mats))
  WN <<- matrix(W[1:cN,], cN, length(mats))
}
getStartingValuesJLS <- function(Sigma) {
  gam0 <- matrix(NA, cM, 1)
  gam1 <- matrix(NA, cM, cN)
  PN.o <- Y %*% t(WN)
  xdat <- PN.o
  for (i in 1:cM) {
    ydat <- M.o[,i]
    res <- lm(ydat ~ xdat)
    gam0[i] <- res$coef[1]
  }
}

```

```

    gam1[i,] <- res$coef[2:(cN+1)]
  }
  n.seeds <- 100
  best.llk <- Inf
  pars <- list(gam0 = gam0, gam1 = gam1, Sigma = Sigma)
  for (i in 1:n.seeds) {
    pars$lamQ <- -sort(abs(.1*rnorm(cN)))
    pars$rinfQ <- rnorm(1, mean=8/100/n.per, sd=4/100/n.per)
    theta <- pars2theta.jls(pars)
    llk <- obj.jls(theta)
    if (llk < best.llk) {
      cat('Improved seed llk to ', llk, '\n')
      best.llk <- llk
      best.pars <- pars
    }
  }
  return(best.pars)
}
pars2theta.jls <- function(pars) {
  if (length(pars$lamQ)!=cN) stop("'lamQ'")
  Sigma.vec <- pars$Sigma[lower.tri(pars$Sigma,diag=TRUE)]
  theta <- c(pars$rinfQ, pars$lamQ, pars$gam0, as.numeric(pars$gam1), Sigma.vec)
  return(theta)
}
obj.jls <- function(theta) {
  pars <- theta2pars.jls(theta)
  valid <- checkPars(pars)
  if (pars$rinfQ<0) valid <- FALSE
  if (pars$rinfQ*1200>20) valid <- FALSE
  if (valid) {
    res.llk <- jls.llk(Y, M.o, W, cL, rinfQ=pars$rinfQ, lamQ=pars$lamQ, gam0=pars$gam0, gam1=pars$gam1,
Sigma=pars$Sigma, mats=mats, dt=1)
    obj <- sum(res.llk$llk)
  } else {

```

```

obj <- 1e6
}
}
theta2pars.jls <- function(theta) {
  pars <- list(rinfQ = theta[1],
             lamQ = theta[2:(cN+1)])
  pars$gam0 <- matrix(theta[(cN+2):(cN+1+cM)], cM, 1)
  pars$gam1 <- matrix(theta[(cN+1+cM+1):(cN+1+cM+cM*cN)], cM, cN)
  pars$Sigma <- matrix(0, cN, cN);
  pars$Sigma[lower.tri(pars$Sigma,diag=TRUE)] <- tail(theta, cN*(cN+1)/2)
  pars$Omega <- pars$Sigma %*% t(pars$Sigma)
  return(pars)
}
checkPars <- function(pars) {
  valid <- TRUE
  if (any(diag(pars$Sigma)<1e-7)) valid <- FALSE
  if (any(diag(pars$Sigma)>1)) valid <- FALSE
  if (any(pars$lamQ>0)) valid <- FALSE
  if (any(pars$lamQ< -1)) valid <- FALSE
  return(valid)
}
jls.llk<-function(yields.o, M.o, W, cL, rinfQ, lamQ, gam0, gam1, KOP=NA, K1P=NA, Sigma, mats, dt,
sigma.e=NA) {
  T <- nrow(yields.o)-1
  J <- ncol(yields.o)
  cM <- ncol(M.o)
  cN <- cL + cM
  WL <- matrix(W[1:cL,], cL, J)
  PL.o <- ts( yields.o %*% t(WL))
  Z <- cbind(M.o, PL.o)
  Omega <- Sigma %*% t(Sigma)
  loads <- jls.loadings(W, rinfQ, lamQ, gam0, gam1, Omega, mats, dt)
  B <- loads$B; A <- loads$A;
  yields.m <- rep(1,T+1)%*%A + Z %*% B
}

```



```

yield.errors <- yields.o[2:(T+1),] - yields.m[2:(T+1),];
square_orthogonal_yield.errors <- yield.errors^2
if (is.na(sigma.e))
  sigma.e <- sqrt( sum(square_orthogonal_yield.errors)/(T*(J-cL)) )
llkQ <- .5*rowSums(square_orthogonal_yield.errors)/sigma.e^2 + (J-cL)*.5*log(2*pi) + .5*(J-
cL)*log(sigma.e^2) # 1*T
if (missing(K0P)|missing(K1P)) {
  var1 <- ar.ols(Z, order.max=1, aic=FALSE, demean=FALSE, intercept=TRUE)
  K1P <- var1$var[,,] - diag(cN)
  K0P <- var1$x.intercept
}
innovations = t(Z[2:(T+1),]) - (K0P%*%matrix(1,1,T) + (K1P+diag(cN))%*%t(Z[1:T,])) # N*T
llkP = .5*cN*log(2*pi) + .5*log(det(Omega)) + .5*colSums(innovations*solve(Omega, innovations)) # 1*T
jsz.llk <- list(llk=t(llkQ + llkP), A=A, B=B, K0P=K0P, K1P=K1P, sigma.e=sigma.e, K0Q=loads$K0Q,
K1Q=loads$K1Q, rho0=loads$rho0, rho1=loads$rho1, llkQ=llkQ, llkP=llkP)
}
jls.loadings<-function(W, rinfQ, lamQ, gam0, gam1, Omega, mats, dt) {
  J <- length(mats)
  cN <- length(lamQ)
  cM <- 2 ## default
  cL <- cN - cM
  WN <- matrix(W[1:cN,], cN, J)
  mats.periods <- round(mats/dt)
  M <- max(mats.periods)
  Gam1 <- rbind(gam1, cbind(diag(cL), matrix(0, cL, cM)))
  Gam0 <- rbind(gam0, matrix(0, cL,1))
  K0Q.X <- matrix(0, cN, 1);
  K1Q.X <- diag(lamQ)
  rho0.X <- rinfQ; rho1.X <- rep(1, cN)
  loads.X.prelim <- gaussian.loadings(mats.periods, K0Q.X, K1Q.X, matrix(0, cN, cN), rho0.X*dt, rho1.X*dt,
dt)
  BX <- loads.X.prelim$B
  U1inv <- Gam1 %*% WN %*% t(BX)
  U1 <- solve(U1inv)
  Omega.X <- U1 %*% Omega %*% t(U1)
}

```

```

loads.X <- gaussian.loadings(mats.periods, K0Q.X, K1Q.X, Omega.X, rho0.X*dt, rho1.X*dt, dt)
AX <- loads.X$A
U0 <- Gam0 + Gam1 %**% WN %**% t(AX)
rho1 <- t(U1) %**% rep(1, cN)
rho0 <- rinfQ - crossprod(rho1, U0)
K1Q <- U1inv %**% K1Q.X %**% U1
K0Q <- -K1Q %**% U0
loads.Z <- gaussian.loadings(mats.periods, K0Q, K1Q, Omega, rho0*dt, rho1*dt, dt)
jls.loadings <- list(A=loads.Z$A, B=loads.Z$B, K0Q=K0Q, K1Q=K1Q, rho0=rho0, rho1=rho1, U0=U0,
U1=U1, Gam0=Gam0, Gam1=Gam1, AX=AX, BX=BX)
}
gaussian.loadings<-function(maturities, K0d, K1d, H0d, rho0d, rho1d, timestep=1) {
M = length(maturities)
N = length(K0d)
Atemp = 0
Btemp = matrix(0,N,1)
Ay = matrix(NA,1,M)
By = matrix(NA,N,M)
curr_mat = 1
K0dp <- t(K0d)
K1dp <- t(K1d)
for (i in 1:maturities[M]) {
Atemp <- Atemp + K0dp%**Btemp +.5%**t(Btemp)**%H0d%**Btemp - rho0d
Btemp <- Btemp + K1dp%**Btemp - rho1d
if (i==maturities[curr_mat]) {
Ay[1,curr_mat] <- -Atemp/maturities[curr_mat]
By[,curr_mat] <- -Btemp/maturities[curr_mat]
curr_mat <- curr_mat + 1
}
}
gaussian.loadings <- list(A = Ay/timestep, B = By/timestep)
}
getOptim <- function (theta, obj, ...)
{

```

```

obj <- match.fun(obj)
cat("Starting optimization...\n")
cat("Function VALUE start point = ", sprintf("% 10.4f", obj(theta, ...)), "\n")
i <- 1
improvement <- Inf
prev.llk <- 0
while (improvement > 0.1) {
  myparscale <- 10^round(log10(abs(theta)))
  res <- optim(theta, obj, gr = NULL, ..., control = list(parscale = myparscale))
  improvement <- abs(res$value - prev.llk)
  prev.llk <- res$value
  theta <- res$par
  cat("iteration ", i, ", likelihood = ", sprintf("% 10.4f",res$value), "\n")
  i <- i + 1
}
cat("improvement = ", improvement, " -- proceed to final step\n")
res <- optim(theta, obj, gr = NULL, ..., control = list(trace = 0,maxit = 50000, parscale = myparscale))
cat("final Nelder-Mead step, likelihood = ", sprintf("% 10.4f",res$value), "\n")
cat("Convergence:", res$convergence, "\n")
print(res$message)
return(res$par)
}
obj.jls<-function(theta) {
  pars <- theta2pars.jls(theta)
  valid <- checkPars(pars)
  if (pars$rinfQ<0) valid <- FALSE
  if (pars$rinfQ*1200>20) valid <- FALSE
  if (valid) {
    res.llk <- jls.llk(Y, M.o, W, cL, rinfQ=pars$rinfQ, lamQ=pars$lamQ, gam0=pars$gam0, gam1=pars$gam1,
Sigma=pars$Sigma, mats=mats, dt=1)
    obj <- sum(res.llk$llk)
  } else {
    obj <- 1e6
  }
}

```

```

}
assignNames <- function(models) {
  for (i in seq_along(models)) {
    models[[i]]$name <- names(models)[i]
  }
  models
}

load_model <- function(filename, flag.zlb, flag.macro, rmin=0, flag.fitted=TRUE) {
  cat("# loading", ifelse(flag.zlb, "shadow-rate", "affine"), "model:", filename, "\n")
  if (!exists("Y"))
    loadYieldData()
  path <- ifelse('estimates' %in% dir(), "estimates/", "../estimates/")
  res.file <- paste0(path, filename)
  model <- loadPars(res.file, flag.macro)
  if (flag.macro) {
    cat("macro-finance model - ")
    if (!exists('M.o'))
      loadMacroData()
    cat("number of yield factors: L = ", model$cL, "\n")
    if (flag.zlb) {
      cat('filtering ZLB risk factors...\n')
      kalman <- jls.kalman.zlb(Y, M.o, model$cL, K0P=model$K0P, K1P=model$K1P, Sigma=model$Sigma,
rho0=model$rho0, rho1=model$rho1, K0Q=model$K0Q, K1Q=model$K1Q, mats, rmin, dt=1,
sigma.e=model$sigma.e)
    } else {
      kalman <- jls.kalman(Y, M.o, model$W, model$cL, rinfQ=model$rinfQ, lamQ=model$lamQ,
gam0=model$gam0, gam1=model$gam1, K0P=model$K0P, K1P=model$K1P, Sigma=model$Sigma, mats,
dt=1, sigma.e=model$sigma.e)
    }
    model$cP <- kalman$x.tt
    model$lIk <- -sum(kalman$lIk)
  } else {
    cat("yields-only model - ")
    cat("number of yield factors: N = ", model$cN, "\n")
    if (flag.zlb) {

```

```

cat('filtering ZLB risk factors...\n')

kalman <- jsz.kalman.zlb(Y, model$mu, model$Phi, model$Sigma, model$muQ, model$PhiQ, model$rho0,
model$rho1, model$sigma.e, mats, rmin)

} else {

kalman <- jsz.kalman(Y, model$W, model$mu, model$Phi, model$Sigma, model$kinfQ, model$lamQ,
model$sigma.e, mats)

}

model$cP <- kalman$x.tt
model$llk <- kalman$llk.sum

}

if (flag.fitted) {
T <- nrow(Y)
if (flag.zlb) {
model$s <- rep(model$rho0.cP, T) + model$cP %*% model$rho1.cP
model$r <- pmax(rmin, model$s)
model$Y.shadow <- rep(1,T) %*% model$A + model$cP %*% model$B
model$Y.hat <- getY(model$cP, model$rho0.cP, model$rho1.cP, model$muQ, model$PhiQ, model$Sigma,
rmin)
model$Y.rn <- getY(model$cP, model$rho0.cP, model$rho1.cP, model$mu, model$Phi, model$Sigma,
rmin)
} else {
model$r <- rep(model$rho0.cP, T) + model$cP %*% model$rho1.cP
model$Y.hat <- rep(1,T) %*% model$A + model$cP %*% model$B
loads.rn <- gaussian.loadings(mats, model$mu, model$Phi-diag(model$cN), model$Omega, model$rho0.cP,
model$rho1.cP)
model$Arn <- loads.rn$A; model$Brn <- loads.rn$B
model$Y.rn <- rep(1,T)%*%model$Arn + model$cP%*%model$Brn
}
model$Y.tp <- model$Y.hat - model$Y.rn
}

model$res.file <- res.file
model$flag.zlb <- flag.zlb
model$flag.macro <- flag.macro
if (flag.zlb)
model$rmin <- rmin
return(model)

```

```

}
jsz.kalman.zlb <- function(Y, mu, Phi, Sigma, muQ, PhiQ, rho0, rho1, sigma.e, mats, rmin, smoothing=FALSE)
{
  require(numDeriv)
  T <- nrow(Y)
  N <- length(mu)
  J <- ncol(Y)
  Omega <- Sigma %**% t(Sigma)
  Q <- Omega
  R <- diag(J)*sigma.e^2 # J x J
  x.tt <- matrix(NA, T, N)
  x.ttm1 <- matrix(NA, T, N)
  P.tt <- array(NA, c(T, N, N))
  P.ttm1 <- array(NA, c(T, N, N))
  x.ttm1[1,] <- solve(diag(N)-Phi) %**% mu
  P.ttm1[1,,] <- matrix( solve(diag(N^2) - kronecker(Phi, Phi))%**%as.numeric(Q), N, N);
  getY <- make.getY.Krippner(rho0, rho1, muQ, PhiQ, Sigma, rmin=rmin)
  llk.sum <- 0
  for (t in 1:T) {
    H <- jacobian(getY, x.ttm1[t,], method="simple")
    tH <- t(H);
    if (any(is.na(H))) {
      cat("Jacobian NaN")
      browser()
    }
    V <- H %**% P.ttm1[t,,] %**% tH + R
    V.inv <- solve(V)
    K <- Phi %**% P.ttm1[t,,] %**% tH %**% V.inv # Kalman gain
    eta <- Y[t,] - getY(x.ttm1[t,])
    llk.sum <- llk.sum -.5*log(det(V)) -.5 * t(eta) %**% V.inv %**% eta
    x.tt[t,] <- x.ttm1[t,] + P.ttm1[t,,] %**% tH %**% V.inv %**% eta
    P.tt[t,,] <- P.ttm1[t,,] - P.ttm1[t,,] %**% tH %**% V.inv %**% H %**% P.ttm1[t,,]
    if (t<T) {
      x.ttm1[t+1,] <- mu + Phi %**% x.ttm1[t,] + K %**% eta
    }
  }
}

```

```

    P.ttm1[t+1,,] <- Phi %*% P.tt[t,,] %*% t(Phi) + Q
  }
}
if (smoothing) {
  x.tT <- matrix(NA, T, N)
  x.tT[T,] <- x.tt[T,]
  for (t in (T-1):1) {
    J.t <- P.tt[t,,] %*% t(Phi) %*% solve(P.ttm1[t+1,,])
    x.tT[t,] <- x.tt[t,] + J.t %*% (x.tT[t+1,] - x.ttm1[t+1,])
  }
  return(list(llk.sum=llk.sum, x.tt=x.tt, x.tT=x.tT))
} else {
  return(list(llk.sum=llk.sum, x.tt=x.tt))
}
}
jsz.kalman<-function (Y, W, mu, Phi, Sigma, kinfQ, lamQ, sigma.e, mats, smoothing = FALSE)
{
  T <- nrow(Y)
  N <- nrow(W)
  J <- ncol(Y)
  Omega <- Sigma %*% t(Sigma)
  Q <- Omega
  loads <- jsz.loadings(W, diag(lamQ), kinfQ, Sigma.cP = Omega, mats = mats, dt = 1)
  G <- as.numeric(loads$AcP)
  H <- t(loads$BcP)
  R <- diag(J) * sigma.e^2
  x.tt <- matrix(NA, T, N)
  x.ttm1 <- matrix(NA, T, N)
  P.tt <- array(NA, c(T, N, N))
  P.ttm1 <- array(NA, c(T, N, N))
  x.ttm1[1, ] <- solve(diag(N) - Phi) %*% mu
  P.ttm1[1, , ] <- matrix(solve(diag(N^2) - kronecker(Phi, Phi)) %*% as.numeric(Q), N, N)
  llk.sum <- 0
  for (t in 1:T) {

```

```

V <- H %>% P.ttm1[t, ] %>% t(H) + R
if (det(V) <= 0) {
  cat("V not pos. Kalman filter\n")
  browser()
}
V.inv <- solve(V)
K <- Phi %>% P.ttm1[t, ] %>% t(H) %>% V.inv
eta <- Y[t, ] - G - H %>% x.ttm1[t, ]
llk.sum <- llk.sum - 0.5 * log(det(V)) - 0.5 * t(eta) %>% V.inv %>% eta
x.tt[t, ] <- x.ttm1[t, ] + P.ttm1[t, ] %>% t(H) %>% V.inv %>% eta
P.tt[t, ] <- P.ttm1[t, ] - P.ttm1[t, ] %>% t(H) %>% V.inv %>% H %>% P.ttm1[t, ]
if (t < T) {
  x.ttm1[t + 1, ] <- mu + Phi %>% x.ttm1[t, ] + K %>% eta
  P.ttm1[t + 1, ] <- Phi %>% P.tt[t, ] %>% t(Phi) +
  Q
}
}
if (smoothing) {
  x.tT <- matrix(NA, T, N)
  x.tT[T, ] <- x.tt[T, ]
  for (t in (T - 1):1) {
    J.t <- P.tt[t, ] %>% t(Phi) %>% solve(P.ttm1[t + 1, ])
    x.tT[t, ] <- x.tt[t, ] + J.t %>% (x.tT[t + 1, ] - x.ttm1[t + 1, ])
  }
  return(list(llk.sum = llk.sum, x.tT = x.tT, x.tt = x.tt))
}
else {
  return(list(llk.sum = llk.sum, x.tt = x.tt))
}
}
getY <- function(cP, rho0, rho1, mu, Phi, Sigma, rmin=0, flag.zlb=TRUE, method = c("CGF2", "Krippner",
"MC", "CGF1"), M=500) {
  method <- match.arg(method)
  method <- "Krippner"

```



```

if (method == "CGF2")
  getYfn <- make.getY.CGF(rho0, rho1, mu, Phi, Sigma, rmin=rmin, flag.zlb=flag.zlb, second.order = TRUE)
else if (method == "CGF1")
  getYfn <- make.getY.CGF(rho0, rho1, mu, Phi, Sigma, rmin=rmin, flag.zlb=flag.zlb, second.order = FALSE)
else if (method == "Krippner")
  getYfn <- make.getY.Krippner(rho0, rho1, mu, Phi, Sigma, rmin=rmin, flag.zlb=flag.zlb)
else if (method == "MC")
  getYfn <- function(Xt) getY.MC(Xt, rho0, rho1, mu, Phi, Sigma, rmin=rmin, flag.zlb=flag.zlb)
if (is.matrix(cP) && dim(cP)[2]==length(rho1)) {
  T <- nrow(cP)
  Yhat <- matrix(NA, T, length(mats))
  for (t in 1:T)
    Yhat[t,] <- getYfn(cP[t,])
} else {
  Yhat <- getYfn(cP)
}
Yhat
}
jsz.loadings<-function (W, K1Q.X, kinfQ, Sigma.cP, mats, dt)
{
  J <- length(mats)
  N <- nrow(K1Q.X)
  rho0d <- 0
  rho1d <- rep(1, N)
  mats.periods <- round(mats/dt)
  M <- max(mats.periods)
  adjK1QX <- jszAdjustK1QX(K1Q.X)
  K1Q.X <- adjK1QX$K1Q.X
  m1 <- adjK1QX$m1
  K0Q.X <- matrix(0, N, 1)
  K0Q.X[m1] <- kinfQ
  loads.X.prelim <- gaussian.loadings(mats.periods, K0Q.X, K1Q.X, matrix(0, N, N), rho0d * dt, rho1d * dt, dt)
  BX <- loads.X.prelim$B
  WBXp <- W %*% t(BX)
}

```

```

Sigma.X <- solve(WBXp, Sigma.cP) %*% solve(t(WBXp))
loads.X <- gaussian.loadings(mats.periods, K0Q.X, K1Q.X, Sigma.X, rho0d * dt, rho1d * dt, dt)
AX <- loads.X$A
WAXp <- W %*% t(AX)
WBXpinv <- solve(WBXp)
BcP <- t(WBXpinv) %*% BX
AcP <- AX %*% t(diag(J) - t(BX) %*% solve(WBXp, W))
K1Q.cP <- WBXp %*% K1Q.X %*% WBXpinv
K0Q.cP <- WBXp %*% K0Q.X - K1Q.cP %*% WAXp
rho1.cP <- t(WBXpinv) %*% rep(1, N)
rho0.cP <- -t(WAXp) %*% rho1.cP

jsz.loadings <- list(AX = AX, BX = BX, AcP = AcP, BcP = BcP, K0Q.cP = K0Q.cP, K1Q.cP = K1Q.cP,
rho0.cP = rho0.cP, K0Q.X = K0Q.X, K1Q.X = K1Q.X, rho1.cP = rho1.cP, Sigma.X = Sigma.X)
}

make.getY.Krippner <- function(rho0, rho1, mu, Phi, Sigma, rmin=0, flag.zlb=TRUE) {
  H <- max(mats)
  g <- function(z)
    return(z*pnorm(z) + dnorm(z))
  N <- length(mu)
  Omega <- Sigma %*% t(Sigma)
  Abar <- numeric(H)
  Af <- numeric(H); Bf <- matrix(NA, N, H)
  A <- numeric(H); B <- matrix(NA, N, H)
  f.af <- numeric(H)
  y.af <- numeric(H)
  mu.af <- numeric(H)
  f.sr <- numeric(H)
  y.sr <- numeric(H)
  mu.sr <- numeric(H)
  sig <- numeric(H)
  A[1] <- -rho0
  B[,1] <- -rho1
  Af[1] <- rho0 - crossprod(B[,1], mu) - .5*t(B[,1])%*%Omega%*%B[,1]
  Abar[1] <- rho0 - crossprod(B[,1], mu)

```

```

Bf[,1] <- t(Phi) %*% rho1
Omega <- Sigma %*% t(Sigma)
VarX <- Omega
sig[1] <- sqrt(t(rho1) %*% VarX %*% rho1)
Phi.hm1 <- Phi
for (h in 2:H) {
  A[h] <- A[h-1] + crossprod(mu, B[,h-1]) + .5*t(B[,h-1])%*%Omega%*%B[,h-1] - rho0
  B[,h] <- t(Phi) %*% B[,h-1] - rho1
  Abar[h] <- rho0 - crossprod(B[,h], mu)
  Af[h] <- Abar[h] - .5*t(B[,h])%*%Omega%*%B[,h]
  Bf[,h] <- t(Phi) %*% Bf[,h-1]
  VarX <- VarX + Phi.hm1 %*% Omega %*% t(Phi.hm1)
  Phi.hm1 <- Phi %*% Phi.hm1
  sig[h] <- sqrt(t(rho1) %*% VarX %*% rho1)
}
function(Xt) {
  mu.af <- Abar + t(Bf) %*% Xt
  f.af <- Af + t(Bf) %*% Xt
  r.af <- rho0 + crossprod(rho1, Xt)
  y.af <- cumsum(c(r.af, f.af[1:(H-1)]))/(1:H)
  f.sr <- rmin + sig*g((f.af-rmin)/sig)
  mu.sr <- rmin + sig*g((mu.af-rmin)/sig)
  r.sr <- max(rmin, r.af)
  y.sr <- cumsum(c(r.sr, f.sr[1:(H-1)]))/(1:H)
  if (flag.zlb) {
    y.sr[mats]
  } else {
    y.af[mats]
  }
}
}
make.getY.CGF <- function(rho0, rho1, mu, Phi, Sigma, H=max(mats), rmin=0, flag.zlb=TRUE,
second.order=TRUE) {
  require(pbivnorm)

```

```

Omega <- Sigma %*% t(Sigma)
sig2.af <- getVarAffine(Phi, Omega, rho1, H-1)
sig.af <- sqrt(sig2.af)
A <- matrix(NA, H-1, H-1) # A_ij = rho1' phi^{i-1} Omega phi^{j-1}' rho1
Bi1 <- Omega
A[1, 1] <- t(rho1) %*% Bi1 %*% rho1
for (i in 2:(H-1)) {
  Bi1 <- Phi %*% Bi1
  A[i, 1] <- t(rho1) %*% Bi1 %*% rho1
  Bij <- Bi1
  for (j in 2:i) {
    Bij <- Bij %*% t(Phi)
    A[i, j] <- t(rho1) %*% Bij %*% rho1
  }
}
A[upper.tri(A)] <- t(A)[upper.tri(A)]
Cov.af <- matrix(NA, H-1, H-1)
for (g in 1:(H-1))
  for (h in 1:g) {
    i <- 1:min(g, h)
    select <- cbind(g-i+1, h-i+1)
    Cov.af[g, h] <- sum(A[select])
  }
Cov.af[upper.tri(Cov.af)] <- t(Cov.af)[upper.tri(Cov.af)]
stopifnot(isTRUE(all.equal(sig2.af, diag(Cov.af), check.attr=FALSE)))
Cor.af <- cov2cor(Cov.af)
sqrt.2pi <- sqrt(2*pi)
Err.black <- matrix(0, H-1, H-1)
M <- H-1
i <- 1:(M*(M-1)/2)
ii <- M*(M-1)/2-i
K <- floor((sqrt(8*ii+1)-1)/2)
h <- M-K-1
jj <- ii - K*(K+1)/2

```

```

g <- M - jj
chivec <- Cor.af[cbind(g, h)]
sqrt.chi <- sqrt(1-chivec^2)
Covvec <- Cov.af[cbind(g, h)]
lt <- as.integer(length(i))
prob <- double(lt)
mypbivnorm <- function(x, y, rho)
  .Fortran("PBIVNORM", prob, c(0, 0), x, y, c(0, 0), rho, lt, PACKAGE = "pbivnorm")[[1]]
function(Xt) {
  Xt <- as.numeric(Xt)
  mu.af <- getMeanAffine(Xt, mu, Phi, rho0, rho1, H-1) # H x 1
  s_t <- rho0 + crossprod(rho1, Xt)
  if (flag.zlb) {
    s <- mu.af/sig.af
    ps <- pnorm(s)
    ds <- dnorm(s)
    r_t <- max(s_t, 0)
    mu.black <- mu.af*ps + sig.af*ds # H-1 x 1
    ER <- cumsum(c(r_t, mu.black))
    if (second.order) {
      p1 <- pnorm((s[g]-chivec*s[h])/sqrt.chi)
      p2 <- pnorm((s[h]-chivec*s[g])/sqrt.chi)
      d3 <- dnorm(sqrt(s[g]^2-2*chivec*s[g]*s[h]+s[h]^2)/sqrt.chi)
      pbiv <- mypbivnorm(-s[g], -s[h], chivec)
      Err.black[] <- 0
      Err.black[lower.tri(Err.black)] <- (mu.af[g] * mu.af[h] + Covvec)*(ps[g] + ps[h] - 1 + pbiv) +
sig.af[h]*mu.af[g]*ds[h]*p1[i] + sig.af[g]*mu.af[h]*ds[g]*p2[i] + sig.af[g]*sig.af[h]*sqrt.chi/sqrt.2pi*d3[i]
      Err.black[upper.tri(Err.black)] <- t(Err.black)[upper.tri(Err.black)]
      diag(Err.black) <- (mu.af^2 + sig2.af)*ps + sig.af*mu.af*ds
      Err <- rbind(c(r_t^2, r_t*mu.black),cbind(r_t*mu.black, Err.black))
    }
  } else {
    ER <- cumsum(c(s_t, mu.af))
    if (second.order)

```

```

    Err <- rbind(c(s_t^2, s_t*mu.af),
                cbind(s_t*mu.af, Cov.af + outer(mu.af, mu.af)))
  }
  if (second.order) {
    ER2 <- cumsum(vapply(1:H, function(h) {
      rval <- Err[h,h]
      if (h>1) {
        rval <- rval + 2*sum(Err[1:(h-1),h])
      }
      rval }, 0))
    yields <- rmin + 1/(1:H)*(ER - 0.5*(ER2 - ER^2))
  } else {
    yields <- rmin + 1/(1:H)*ER
  }
  yields[mats]
}
}

getY.MC <- function(x0, gamma.0, gamma.1, muQ, PhiQ, Sigma, rmin=0, M=500, flag.zlb=TRUE,
fixed.seed=TRUE) {
  x0 <- as.numeric(x0)
  gamma.1 <- as.numeric(gamma.1)
  if (length(x0)!=length(gamma.1)) {
    print(x0)
    print(gamma.1)
    stop("x error")
  }
  muQ <- as.numeric(muQ)
  H <- max(mats)
  N <- length(gamma.1)
  r.sim <- matrix(NA, M, H)
  if (flag.zlb) {
    r.sim[,1] <- max(gamma.0 + crossprod(gamma.1, x0), rmin) ## ZLB
  } else {
    r.sim[,1] <- gamma.0 + crossprod(gamma.1, x0) ## affine
  }
}

```

```

}
mu.mat <- matrix(rep(muQ, M), N, M)
x.mat <- matrix(rep(x0, M), N, M)
gam0.vec <- rep(gamma.0, M);
shocks <- matrix(NA, N, M);
ind.even <- seq(2,M,2)
ind.odd <- seq(1,M,2)
if (fixed.seed)
  set.seed(10)
for (h in 2:H) {
  tmp <- matrix(rnorm(M*N/2), N, M/2)
  shocks[, ind.even] <- tmp;
  shocks[, ind.odd] <- -tmp;
  x.mat <- mu.mat + PhiQ %*% x.mat + Sigma %*% shocks
  if (flag.zlb) {
    r.sim[,h] <- pmax( gam0.vec + gamma.1 %*% x.mat, rmin)
  } else {
    r.sim[,h] <- gam0.vec + gamma.1 %*% x.mat
  }
}
Pn.mc <- numeric(length(mats))
for (tau in mats)
  Pn.mc[which(tau==mats)] <- mean( exp(-rowSums(r.sim[,1:tau])))
Y.mc <- -log(Pn.mc)/mats
if (any(is.na(Y.mc))) {
  stop("error in Yzlb -- some yields are NA")
} else {
  return(Y.mc)
}
}
function(K1Q.X, eps1=1e-3) {
  cutoff.fun <- function(x, eps1) {
    eps1 = 1e-3;
    eps0 = 1e-5;

```

```

xc <- 1*(log(x)<log(eps0)) +
  (1 - (log(x) - log(eps0))/(log(eps1) - log(eps0)))*(log(x)>=log(eps0) & log(x)<log(eps1)) +
  0*(log(x)>log(eps1));
xc[x==0] <- 1;
return(xc)
}
N <- nrow(K1Q.X)
diag.K1Q.X <- diag(K1Q.X);
isDiagonal <- all(K1Q.X==diag(diag.K1Q.X));
if (isDiagonal) {
  diag.K1Q.X <- -sort(-diag.K1Q.X);
  K1Q.X <- diag(diag.K1Q.X);
  hasNearUnitRoot <- !all(abs(diag.K1Q.X)>eps1);
  hasNearRepeatedRoot <- !all(abs(diff(diag.K1Q.X)>eps1);
  isTypicalDiagonal <- isDiagonal && !hasNearRepeatedRoot && !hasNearUnitRoot;
} else {
  isTypicalDiagonal <- FALSE
}
if (isDiagonal && !isTypicalDiagonal) {
  diff.diag <- abs(diff(diag.K1Q.X));
  super.diag <- cutoff.fun(diff.diag);
  K1Q.X[1:N-1,2:N] <- K1Q.X[1:N-1,2:N] + diag(super.diag);
}
super.diag = diag(K1Q.X[-N,-1]);
m1 <- max(which(cumprod(c(1,super.diag))>0))
return(list(K1Q.X=K1Q.X, isTypicalDiagonal=isTypicalDiagonal, m1=m1))
}
getVarAffine <- function(Phi, Omega, rho1, H=120) {
  VartZtph <- 0
  sig2tph <- numeric(H)
  N <- length(rho1)
  Phi.h <- diag(N)
  for (h in 1:H) {
    VartZtph <- VartZtph + Phi.h %*% Omega %*% t(Phi.h)

```



```

sig2tph[h] <- t(rho1) %*% VartZtph %*% rho1
Phi.h <- Phi %*% Phi.h
}
sig2tph
}
getMeanAffine <- function(Xt, mu, Phi, rho0, rho1, H=120, return.current=FALSE) {
  EXtph <- Xt
  EX <- matrix(NA, length(mu), H+1)
  EX[,1] <- Xt
  Er <- numeric(H+1)
  Er[1] <- as.numeric(rho0 + crossprod(rho1, Xt))
  for (h in 1:H) {
    EXtph <- mu + Phi %*% EXtph
    Er[1+h] <- as.numeric(rho0 + crossprod(rho1, EXtph))
    EX[,1+h] <- EXtph
  }
  if (return.current) {
    Er
  } else {
    tail(Er, -1)
  }
}

#####Ēnu likmes aprēķināšana
cL<-2
Y<-as.matrix(yield)
M.o<-as.matrix(macro[,2:3])
dates<-as.matrix(macro[,1])
mats<-c(3,6,9,12,24,60,84,120)
n.per<-12
init()
PL.o <- Y %*% t(WL)
Z <- cbind(M.o, PL.o)
ar1 <- ar.ols(Z, aic=FALSE, order.max=1, intercept=TRUE, demean=FALSE)
K1P <- ar1$ar[,.] - diag(cN)

```

```

KOP <- ar1$x.intercept
Omega <- ar1$var.pred
Sigma <- t(chol(Omega))
pars.start <- getStartingValuesJLS(Sigma)
theta.start <- pars2theta.jls(pars.start)
theta <- getOptim(theta.start, obj.jls)
## results
pars <- theta2pars.jls(theta)
pars$KOP <- KOP
pars$K1P <- K1P
pars$Omega <- pars$Sigma %*% t(pars$Sigma)
## likelihood observed model
res.llk <- jls.llk(Y, M.o, W, cL, rinfQ=pars$rinfQ, lamQ=pars$lamQ, gam0=pars$gam0, gam1=pars$gam1,
Sigma=pars$Sigma, mats=mats, dt=1)
pars$sigma.e <- res.llk$sigma.e
macro_shadow<-load.macro.shadow(flag.macro=1, flag.zlb=1)
sss<-macro_shadow$s
plot(as.vector(sss), type="l", col="red", lwd=2,main = "Rudebush, ES")#, ylim=c(-1.5,2.5))
lines(Y[,1], lwd=2)
##Prognose
fak<-macro_shadow$cP
rho<-matrix(data=macro_shadow$rho1.cP, nrow=4, ncol=1)
rho0<-macro_shadow$rho0.cP
xT<-fak
ff<-f_yield_m(xT, sss, yield, RR=1, Y=FALSE, R=1)
xT1<-ff[[1]]
macro<-macro_shadow$cP
macro<-rbind(macro, xT1)
tt<-getY(macro,macro_shadow$rho0.cP,macro_shadow$rho1.cP,macro_shadow$muQ,macro_shadow$PhiQ,
macro_shadow$Sigma, rmin=-0.5)
yield_forecast<-tt[#prognozetas laika rindas garums,]
f_yield_m(xT, sss, yield, RR=1, Y=TRUE, R=1)
write.csv(sss, file = "Shadow_rate.csv", row.names =TRUE) #rezultata saglabāšana

```

```

####V.Ajevska makro modelis
#funkcijas
teorija_m_uzl<-function(Xt_lag,shift, fai, SS_g, bet, mu_m){
  yn<-length(data[1,])
  X0<-Xt_lag
  n<-maturity[NROW(maturity)]
  X1<-matrix(data=0,ncol=4, nrow=n)
  mju<-matrix(data=c(0, 0, mu_m[1], mu_m[2]),ncol=1,nrow=4)
  I<-diag(x=1,nrow=4,ncol=4)
  r_und<-shift/1200
  for (i in 1:n){
    X1[i,] <-matrix.power(fai,(i-1))%*%X0+(I-matrix.power(fai,(i-1)))%*%mju
  }
  cov1<-array(matrix(data=0, nrow=4, ncol=4), dim=c(4,4,n,n))
  for (i in 2:n){
    cov1[,,(i-1),(i-1)]+matrix.power(fai,i-2)%*%(SS_g)%*%t(matrix.power(fai,i-2))
  }
  cov1<-cov1[,,2:n,2:n]
  s<-X1%*%bet ##+alpha
  Sigma_s<-matrix(data=0, nrow=(n-1), ncol=(n-1))
  for(i in 1:(n-1)){
    Sigma_s[i,i]<-t(bet)%*%cov1[,,i,i]%*%(bet)
  }
  sigma<-diag(x=Sigma_s)^0.5
  zet <- (s[2:n]-r_und)/sigma
  I_r<-matrix(data=0, nrow=1, ncol=n)
  dI_r<-matrix(data=0, nrow=n, ncol=4)
  Phi1<-matrix(data=0, ncol=(n-1),nrow=1)
  phi<-matrix(data=0, ncol=(n-1),nrow=1)
  for (i in 1:(n-1)){
    Phi1[i]<-pnorm(-zet[i],0,1)
    phi[i]<-dnorm(zet[i],0,1)
  }
  r<-c()

```

```

dr<-matrix(data=0, nrow=n, ncol=4)
r[1]<-max(r_und, s[1])
if (s[1]>r_und){
  dr[1,]=t(bet)
}else{
  dr[1,]=0
}
for (i in 2:n){
  r[i]<-r_und + (s[i]-r_und)*(1-Phi1[i-1])+sigma[i-1]*phi[i-1]
  if (s[i]>r_und){
    dr[i,]<-t(bet)**matrix.power(fai,(i-1))*(1-Phi1[i-1])
  }else{
    dr[i,]=0
  }
  I_r[i]<-I_r[i-1] +r[i]
  dI_r[i,]<-dI_r[i-1,]+dr[i,]
}
I_sigma<-matrix(data=0, nrow=1, ncol=(n-1))
dI_sigma<-matrix(data=0, nrow=n, ncol=4)
b<-matrix(data=0, nrow=1, ncol=n)
y<-matrix(data=0, nrow=1, ncol=n)
b[1]<-exp(-r[1])
y[1]<-r[1]
dy<-matrix(data=0, nrow=n, ncol=4)
for (i in 2:n){
  if ((1-I_r[i]+0.5*I_sigma[i-1])>0){
    y[i]<-(r[1]-log((1-I_r[i]+0.5*I_sigma[i-1])))i
  }else{
    y[i]<-(r[1]+I_r[i]-0.5*I_sigma[i-1])/i
  }
  dy[i,]<-(dr[1]-(as.vector(1/(1-I_r[i]+0.5*I_sigma[i-1]))*(-dI_r[i,]+0.5*dI_sigma[(i-1),])))i
}
dy_obst<-matrix(data=0, nrow=yn,ncol=4)
y_obs<-matrix(y[maturity], nrow=yn, ncol=1)

```

```

dy_obst[,]<-dy[maturity,]
resultats<-data.frame(y_obs,dy_obst)
}
llfn<-function(bigtheta){
  fai<-matrix(data=c(0.9999999,0, 0,bigtheta[1]), ncol=2, nrow=2)
  Sigma<-matrix(data=c(bigtheta[K],bigtheta[K+1],0,bigtheta[K+2]), ncol=2, nrow=2)
  lam0<-bigtheta[K+3]
  lam1<-matrix(data=c(bigtheta[K+4], bigtheta[K+6], bigtheta[K+5],bigtheta[K+7]),ncol=2, nrow=2)
  lam0_m<-matrix(data=c(bigtheta[K+8], bigtheta[K+9]), nrow=2, ncol=1)
  lam1_m<-matrix(data=c(bigtheta[K+10],bigtheta[K+12],bigtheta[K+11],bigtheta[K+13]), nrow=2, ncol=2)

  sig<-bigtheta[NROW(bigtheta)]
  add<-matrix(data=c(lam0,0))
  mju<-Sigma%%(add)
  alpha<-del0
  Phi_bar<-fai+Sigma%%lam1
  Sigma_m<-t(chol(omega))
  mu_m<-Sigma_m%%lam0_m
  fai_m<-Phi_bar_m-Sigma_m%%lam1_m
  fai_g<-matrix(data=0, nrow=4, ncol=4)
  fai_g[1:2,1:2]<-fai
  fai_g[3:4,3:4]<-fai_m
  mju_g<-matrix(data=c(mju[1], mju[2], 0,0), nrow=4, ncol=1)
  Phi_bar_g<-matrix(data=0, nrow=4, ncol=4)
  Phi_bar_g[1:2,1:2]<-Phi_bar
  Phi_bar_g[3:4,3:4]<-Phi_bar_m
  sigsgr<-bigtheta[18]
  bet<-matrix(data=c(1,1),ncol=1, nrow=2)
  bet_un<- bigtheta[16]
  bet_inf<- bigtheta[17]
  bet_g<-matrix(data=c(bet[1], bet[2],bet_un, bet_inf), ncol=1, nrow=4)
  inter<-diag(x=1,ncol=(4),nrow=(4))-kronecker(Phi_bar,Phi_bar,FUN="*")
  SS<-Sigma%%t(Sigma)
  vecsigma<- solve(inter,diag(x=1,nrow=4,ncol=4))%%matrix(data=SS,ncol=1,nrow=4)

```

```

sigmat_t<-matrix(data=vecsigma,ncol=2, nrow=2)
inter_m<-diag(x=1,ncol=(K^2),nrow=(K^2))-kronecker(Phi_bar_m,Phi_bar_m, FUN="*")
SS_m<-omega
vecsigma_m<-solve(inter_m,diag(x=1,ncol=(K^2),nrow=(K^2)))%%matrix(data=SS_m,ncol=1,nrow=4)
sigmat_t_m<-matrix(data=vecsigma_m,ncol=2, nrow=2)
SS_g=matrix(data=0, nrow=4, ncol=4)
SS_g[1:2,1:2]<- SS
SS_g[3:4,3:4]<- SS_m
sigmat_t_g<-matrix(data=0, nrow=4, ncol=4)
sigmat_t_g[1:2,1:2]<-sigmat_t
sigmat_t_g[3:4, 3:4]<-sigmat_t_m
Xini<-c(0.00398507467929828, -0.00372035595419322, 0, 0)##sākuma vērtības
Xt_t<-matrix(Xini,nrow=4, ncol=1)
llfn<-0.5*yn*(n-1)*log(2*pi)
XNS<-matrix(data=0,nrow=NROW(data[,1]), ncol=4)
if (max(abs(eig(Phi_bar)))>=1){
  llfn<-Re(-llfn)+1e08
}else{
for(i in 1:NROW(data[,1])){
  Xt_lag <-mju_g+Phi_bar_g%%Xt_t
  sigmat_lag<-Phi_bar_g%%sigmat_t_g%%t(Phi_bar_g)+SS_g
shift = -0.5
  rezultats<-teorija_m_uzl(Xt_lag, shift, fai_g, sigmat_lag, bet_g, mu_m)##uzlabota vers.
  y_obst<-rezultats[,1]
  dy_obst<-as.matrix(rezultats[,2:5])
  itat_lag<-matrix(t(yy[i,]-y_obst))
  itat_lag<-matrix(data=c(itat_lag),(un[i,]-Xt_lag[3]),inf[i,]-Xt_lag[4]), ncol=1, nrow=yn+2)
  dy_obst<-rbind(dy_obst, c(0,0,1,0), c(0,0,0,1))
  Q<-matrix(data=0, nrow=(yn+2), ncol=(yn+2))
  Q[1:yn, 1:yn]<-sigsgr^2*diag(x=(yn))
  ft_lag<-dy_obst%%sigmat_lag%%t(dy_obst)+Q
  if (i>1){
    llfn<-llfn-0.5*log(det(ft_lag))-0.5*t(itat_lag)%%(solve(ft_lag,diag(yn+2)))%%itat_lag
  }
}

```

```

Kalg<-sigmat_lag%%t(dy_obst)%(solve(ft_lag, diag(x=yn+2)))
Xt_t <-Xt_lag + Kalg%%itat_lag
sigmat_t_g<-sigmat_lag-Kalg%%dy_obst%%sigmat_lag
XNS[i,]<-Xt_t
}
llfn<-(-llfn)
}
if((SS_g[1,1]&SS_g[2,1]&SS_g[1,2]&SS_g[2,2]&SS_g[3,4]&SS_g[4,3]&SS_g[3,3]&SS_g[4,4])<0){
  llfn<-Re(llfn)+1e8
}
if(abs(Im(llfn))>0){
  llfn<-Re(llfn)+1e8
}
s<-1200*(t(bet_g)%%t(XNS))
}
llfn
}
##darbs ar datiem
data<-yield
maturity<- c(3,6,9,12,24,60,84,120)
yn<-NROW(maturity)
n<-length(maturity)
yy<-data/1200
crp<-0
K<-2
mnlags<-1
lam1<-matrix(data=0, nrow=K, ncol=K)
del1<-matrix(data=1, nrow=2, ncol=1)
un<-macro[,2]/1200
inf<-macro[,3]/1200
Xo<-data.frame(un, inf)
nobs<-NROW(un)
nlags<-mnlags
X<-t(as.matrix(Xo))
Y<-X[,-1]

```

```

X<-X[,-length(X[1,])]
gamav<-(Y%*%t(X))%*%solve(X%*%t(X))
omega<-((Y-gamav%*%X)%*%t(Y-gamav%*%X))/(nobs-1)
Phi_bar_m<-gamav
eigenn<-eigen(Phi_bar_m)
V<-matrix(eigenn$vector, nrow=2, ncol=2)
D<-matrix(data=c(eigenn$value[1], 0,0,eigenn$value[2]),nrow=2, ncol=2)
D[1,1]<-0.9999999
Phi_bar_m<-V%*%D%*%solve(V)
bigtheta <-c(9.921841e-01, -1.724854e-05, -1.410591e-05, -1.254432e-04, 2.714288e+00, 5.004862e-01,
            1.029697e+01, 2.675704e+00, 1.559514e+00, 8.838452e+00, 2.320790e+00, 1.480690e+00,
            4.484339e-03, 5.034429e-01, 2.342460e-01, 2.265267e-01, 7.109507e-01, 1.816936e-04)##DE
res2<-optim(par=bigtheta,llfn, method="Nelder-Mead", control=list(trace=2, maxit=1000)) #optimizācija
re1<-llfn(res2$par) #rezultāts
##prognose
xT<-XNS
f_shadow<-f_yield_m(xT, s, yield,RR=1200, Y=FALSE, R=0)
f_s<-f_shadow[[1]]
yield_forecast<-matrix(data=0, nrow=10,ncol=8)
for(i in 1:10){
  Xt_t<-f_s[i,]
  Xt_lag <-mju_g+Phi_bar_g%*%Xt_t
  sigmat_lag<-Phi_bar_g%*%sigmat_t_g%*%t(Phi_bar_g)+SS_g
  shift = -0.5
  rezultats<-teorija_m_uzl(Xt_lag, shift, fai_g, sigmat_lag, bet_g, mu_m)
  y_obst<-rezultats[,1]
  yield_forecast[i,]<-y_obst*1200
}
resss<-f_yield_m(xT, s, yield,RR=1200, Y=TRUE, R=0)
write.csv(t(s),"Shadow_rate.csv")

### L.Krippnera modelis
#funkcijas
K1_fun<-function(xPi,kappaQ,sigma1, sigma2,rho12,Tau,dtau,ZLB, ZLB_Imposed){

```



```

g1<-matrix(data=1, nrow=length(yield[2,]),ncol=1)
g2<-exp(-kappaQ* Tau)
G2<-(1-g2)/kappaQ
SR<-xPi[1]*g1+xPi[2]*g2
VE<-0.5*sigma1^2* Tau* Tau-0.5*sigma2^2*G2*G2-rho12*sigma1*sigma2* Tau*G2
GATSM_f<-SR+VE
g22<-(1-exp(-2*kappaQ* Tau))/(2*kappaQ)
Om<-sqrt(sigma1^2* Tau+sigma2^2*g22+2*rho12*sigma1*sigma2*G2) #Om = Omega
d<-(GATSM_f-ZLB)/Om
CumNormDist<-pnorm(d) ##Calculate cumulative normal probabilities for N(0,1) distribution
Res1<-matrix(data=c(g1 *CumNormDist,g2* CumNormDist), ncol=2, nrow=length(yield[2,]))
Res2<-matrix(ZLB+(GATSM_f-ZLB)*CumNormDist+exp(-0.5*d*d)*Om/sqrt(2*pi))
res<-data.frame(Res1,Res2)
}
Extended_Kalman<-function(p){
kappaQ<-p[1]
kappaP<-matrix(data=c(p[2],p[4],p[3],p[5]),nrow=2,ncol=2)
theta<-matrix(data=c(p[6],p[7]),nrow=2, ncol=1)
sigma1<-abs(p[8])
sigma2<-abs(p[9])
rho12<-p[10]
S<-matrix(data=c(sigma1, rho12*sigma2, 0, sigma2*sqrt(abs(1-rho12^2))),ncol=n, nrow=n)
omega<-S%*%t(S)
S_nu<-p[11:18]
n1<-NROW(yield[,1])##colonas garums
n2<-length(yield[1,])##rindas garums
xT<-matrix(data=0, nrow=n1, ncol=n)
pT<- array(diag(1), dim=c(n,n,n1))
eigV<-eigen(kappaP)$vectors
eigD<-eigen(kappaP)$values
V<-matrix(data=c(eigV[1,2],eigV[2,2],eigV[1,1],eigV[2,1]),ncol=n,nrow=n)
D<-matrix(data=c(eigD[2],0,0,eigD[1]),ncol=n,nrow=n)
d1<-abs(D[1,1])
d2<-abs(D[2,2])

```

```

D<-diag(x=c(d1,d2),nrow=n,ncol=n)
kappaP<-Re((V%*%D)%*%solve(V))
fF<-expm(-kappaP*dt)
ifelse(abs(eigen(fF)$value)>1,"error (abs(eigen(fF)$vector)>1","All is okey")
Q<-matrix(data=c(fun(2*d1),0,fun(d1+d2),fun(2*d2)), nrow=2, ncol=2)
Q[2,1]<-Q[1,2]
U<-solve(V,omega)%*%t(solve(V))
Q<-U*Q
Q<-V%*%Q%*%t(V)
Q<-Re(Q)
R<-diag(x=S_nu^2)
xP<-theta
pPlus<-matrix(data=c(0.5/d1,0,1/(d1+d2),0.5/d2),ncol=2, nrow=2)
pPlus[2,1]<-pPlus[1,2]
pPlus<-U*pPlus
pPlus<-V%*%pPlus%*%t(V)
pPlus<-Re(pPlus)
N<-NROW(yield[,1])
LogL<-0
IEKF_Count=-1e-5 # OPTION: EKF if 0, IEKF steps if >0, tolerance if <0 (e.g. -1e-5).
if(IEKF_Count<0){
  x_tolerance<-abs(IEKF_Count)
  IEKF_Count<-20
}else{
  break
}
for (i in 1:(n1)){
  xt1<-matrix((diag(n)-fF)%*%theta+fF%*%xP)
  p_minus<-fF%*%pPlus*t(fF)+Q
  y_obs<-0.01*t(yield[i,])#0.01*(yield[i,])
##EU dati
if(i>(N-20)){
  ZLB = -0.005 #min(yield[,8]*0.01)
}else if(i>(N-20-43)){

```

```

ZLB = -0.004
}else if(i>(N-20-46)){
  ZLB = -0.003
}else if(i>(N-40-46)){
  ZLB = -0.002
}else if(i>(N-40-49)){
ZLB = -0.001
}else{
  ZLB = 0
}
xPM<-xt1 ##xPM = x_Plus_i_Minus_1
xPi<-xt1 #xPi = x_Plus_i0
IterCount<-0
for(b in 1:(1+IEKF_Count)){
  IterCount<-IterCount+1
  res<-K1_fun(xPi,kappaQ,sigma1, sigma2,rho12,Tau,dtau,ZLB, ZLB_Imposed)
  yH<-res[,3] ##GATSM_F (y_Hat)
  HI<-matrix(data=c(res[,1],res[,2]), nrow=length(yield[2,]), ncol=2)
  HPHR<-(as.vector(HI%%p_minus%%t(HI))+R)
  K_i<-round(p_minus%%t(HI)%solve(HPHR),8)
  w_i<-y_obs-yH-HI%%(xt1-xPi)
  xPlusI<-xt1+K_i%%w_i
  xPM<-xPi
  xPi<-xPlusI
}
xP<-xPlusI
pPlus<-(diag(x=n)-(K_i%%HI))%%p_minus
xT[i,]<-xP##shadow rate
pT[,i]<-pPlus
LogL<-LogL+log(det(HPHR))+t(w_i)%solve(HPHR)%w_i
EKF_logL<-0.5*n1*n2*log(2*pi)-0.5*LogL
}
sumI<-matrix(data=0, nrow=n1, ncol=1)
for(i in 1:n1){

```

```

sum1[i]<-sum(xT[i,])*100
}
plot(sum1, type="l", col="red", lwd=2, main="SSR + SR")
lines(yield[,1], lwd=2)
EKF_logL<-as.vector(-EKF_logL)
}
##datu sagatavošana
dt<-1/12
dtau<-0.01
Tau<-matrix(data= c(0.25,0.5,0.75,1,2,5,7,10), nrow=length(yield[,1]), ncol=1)
n<-2##faktoru skaits
ZLB_Imposed=1
p<-c(0.1009511570, 0.1045330520, 0.5949049817, 0.0125111965, 0.1034642338, 0.1122022622,
-0.0647985576, 0.0061946934, 0.0051879316, -0.8757596711, 0.0022981474, -0.0020294542,
0.0021285901, 0.0019340824, 0.0017608627, 0.0007934497, 0.0005946556, 0.0004039316) #sākuma v.
re2<-optim(par=p,Extended_Kalman,method="Nelder-Mead", control=list(trace=2, maxit=500)) #optimizācija
##prognoze
f_shadow<-f_yield(xT, sum1, yield, RR=100, Y=FALSE) ###porg. funkcija
f_s<-f_shadow[[1]]
yield_forecast<-matrix(data=0, nrow=10, ncol=8)
yield_forecast[1,]<-0.01*t(yield[NROW(yield[,1]),])
for(i in 1:10){
  xP<-f_s[i,]
  xPi<-f_s[i,]
  ZLB = -0.005
  xt1<-matrix((diag(n)-fF)%*%theta+fF%*%xP)
  p_minus<-fF%*%pPlus*t(fF)+Q
  xPi<-xt1
  res<-K1_fun(xPi,kappaQ,sigma1, sigma2,rho12,Tau,dtau,ZLB, ZLB_Imposed)
  yH<-res[,3]
  yield_forecast[i,]<-yH*100
}
resss<-f_yield(xT, sum1, yield, RR=100, Y=TRUE)
write.csv(sum1, file = "Shadow_rate.csv") ##saglabā rez.

```

```

###ETZ un EMS
p<-p[1] ##mean reversion
EMS<-c()
pip<-c()
N<-NROW(yield[,1])
for(i in 1:N){
L<-xT[i,1]
S<-xT[i,2]
ZLB= -0.005
pip[i]<-ifelse(-(1/p)*log(abs((L+(ZLB))/S))<ZLB,0,-(1/p)*log(abs((L+(ZLB))/S)))
if(sum1[i]<(ZLB*100)){
EMS[i]<-(L*pip[i]-S*((1/p)*exp(-p*pip[i])))
}else{
EMS[i]<-(-S*(1/p))
}
EMS[i]<-ifelse(EMS[i]>1,1,EMS[i])
}
plot(ts(pip,start=c(2010,2), end=c(2021,2),frequency=12), type="l", ylab="Gadi", main="ETZ", xlab="Laiks")
plot(ts(EMS*100,start=c(2010,2), end=c(2021,2),frequency=12),
type="l", main="Effective monetary Stimulus", ylab="Procenti",xlab="Laiks")

```

```

###V.Ajevska modelis ar tikai nenovērojamiem faktoriem
teorija<-function(Xt_lag,alpha,bet,fai,sigma_lag,shift){
yn<-length(yield[,1])
X0<-Xt_lag
n<-maturity[NROW(maturity)]
X<-matrix(data=0,ncol=2, nrow=n)
mju<-matrix(data=0,ncol=1,nrow=2)
I<-diag(x=1,nrow=2,ncol=2)
r_und<-shift/1200
for (i in 1:n){
X[i,] <-matrix.power(fai,(i-1))%*%X0+(I-matrix.power(fai,(i-1)))%*%mju
}
cov1<-array(matrix(data=0, nrow=2, ncol=2), dim=c(2,2,n,n))

```

```

for (i in 2:n){
cov1[,i,i] = cov1[,,(i-1),(i-1)]+ matrix.power(fai,i-
2)%*(sigma_lag%*t(sigma_lag))%*t(matrix.power(fai,i-2))
}
cov1<-cov1[,2:n,2:n]
s<-alpha+X%*bet
Sigma_s<-matrix(data=0, nrow=(n-1), ncol=(n-1))
for(i in 1:(n-1)){
Sigma_s[i,i]<-t(bet)%*cov1[,i,i]%*(bet)
}
sigma<-diag(x=Sigma_s)^0.5
sigma[which(sigma==0)]<-sigma[which(sigma==0)-1]
zet <- (s[2:n]-r_und)/sigma
I_r<-matrix(data=0, nrow=1, ncol=n)
dI_r<-matrix(data=0, nrow=n, ncol=2)
Phi1<-matrix(data=0, ncol=(n-1),nrow=1)
phi<-matrix(data=0, ncol=(n-1),nrow=1)
for (i in 1:(n-1)){
Phi1[i]<-pnorm(-zet[i])
phi[i]<-dnorm(zet[i])
}
r<-c()#matrix(data=0,nrow=n, ncol=1)
dr<-matrix(data=0, nrow=n, ncol=2)
r[1]<-max(r_und, s[1])
if (s[1]>0){
dr[1,]=t(bet)
}else{
dr[1,]<-0
}
for (i in 2:n){
r[i]<-r_und + (s[i]-r_und)*(1-Phi1[i-1])+sigma[i-1]*phi[i-1]
if (s[i]>r_und){
dr[i,]<-t(bet)%*matrix.power(fai,i-1)*(1-Phi1[i-1])
}else{

```

```

dr[i,]<-0
}
I_r[i]<-I_r[i-1] +r[i]
dI_r[i,]<-dI_r[i-1,]+dr[i,]
}
I_sigma<-matrix(data=0, nrow=1, ncol=(n-1))
dI_sigma<-matrix(data=0, nrow=n, ncol=2)
b<-matrix(data=0, nrow=1, ncol=n)
y<-matrix(data=0, nrow=1, ncol=n)
b[1]<-exp(-r[1])
y[1]<-r[1]
dy<-matrix(data=0, nrow=n, ncol=2)
for (i in 2:n){
  if ((1-I_r[i]+0.5*I_sigma[i-1])>0){
    y[i]<-(r[1]-log((1-I_r[i]+0.5*I_sigma[i-1])))i
  }else{
    y[i]<-(r[1]+I_r[i]-0.5*I_sigma[i-1])/i
  }
  dy[i,]<-(dr[1]-as.vector(1/(1-I_r[i]+0.5*I_sigma[i-1]))*(-dI_r[i,]+0.5*dI_sigma[(i-1),]))/i
}
dy_obst<-matrix(data=0, nrow=yn,ncol=2)
y_obs<-matrix(y[maturity], nrow=yn, ncol=1)
dy_obst[,]<-dy[maturity,]
resultats<-data.frame(y_obs,dy_obst)
}
llfn<-function(bigtheta){
  fai<-matrix(data=c(0.9999999,0, 0,bigtheta[1]), ncol=2, nrow=2)
  Sigma<-matrix(data=c(bigtheta[K],bigtheta[K+1],0,bigtheta[K+2]), ncol=2, nrow=2)
  lam0<-bigtheta[K+3]
  lam1<-matrix(data=c(0, bigtheta[K+5], bigtheta[K+4], bigtheta[K+6]),ncol=2, nrow=2)
  sig<-bigtheta[NROW(bigtheta)]
  add<-matrix(data=c(0,lam0))
  mju<-Sigma%*%add
  alpha<-del0
}

```

```

Phi_bar<-fai+Sigma%%lam1
sigsg<-bigtheta[NROW(bigtheta)]
bet<-matrix(data=c(1,1))
Xini<-c(0.00323526218047918,0.000528178893532243)
Xt_t<-matrix(Xini,nrow=2, ncol=1)
inter<-diag(x=1,ncol=(K^2),nrow=(K^2))-kronecker(Phi_bar,Phi_bar, FUN="*")
SS<-Sigma%%t(Sigma)
SSs<-as.vector(SS)
vecsigma<- mldivide(inter,diag(x=1,ncol=(K^2),nrow=(K^2)))%%matrix(data=SS,ncol=1,nrow=4)
sigmat_t<-matrix(data=vecsigma,ncol=2, nrow=2)
XNS<-matrix(data=0,nrow=n, ncol=2)
llfn=-0.5*yn*(n-1)*log(2*pi)
if (max(abs(eig(Phi_bar)))>1){
  llfn=(Re(-llfn)+1e08)
}else{
for(i in 1:n){
Xt_lag <-mju+Phi_bar%%Xt_t
  sigmat_lag<-Phi_bar%%sigmat_t%%t(Phi_bar)+SS
  if(i>(n-20)){
    shift = -0.5#min(yield[,8]) #
  }else if(i>(n-20-43)){
    shift = -0.4
  }else if(i>(n-20-46)){
    shift = -0.3
  }else if(i>(n-40-46)){
    shift = -0.2
  }else if(i>(n-40-49)){
    shift = -0.1
  }else{
    shift = 0
  }
  rezultats<-teorija(Xt_lag,alpha, bet, fai, sigmat_lag, shift)
  y_obst<-rezultats[,1]
  dy_obst<-as.matrix(rezultats[,2:3])
}
}

```



```

itat_lag<-matrix(t(yy[i,])-y_obst)
ft_lag<-dy_obst%%sigmat_lag%%t(dy_obst)+sigmgr^2*diag(x=yn)
if (i>1){
  llfn<-llfn-0.5*log(det(ft_lag))-0.5*t(itat_lag)%%(solve(ft_lag,diag(yn)))%%itat_lag
}
Kalg<-sigmat_lag%%t(dy_obst)%%(solve(ft_lag, diag(x=yn)))
Xt_t <-Xt_lag + Kalg%%itat_lag
sigmat_t<-sigmat_lag-Kalg%%dy_obst%%sigmat_lag
XNS[i,]<-Xt_t
}
llfn=-llfn
}
if((SS[1,1]&SS[2,1]&SS[1,2]&SS[2,2])<0){
  llfn<-Re(llfn)+1e8
}
if(abs(Im(llfn))>0){
  llfn<-Re(llfn)+1e8
}
llfn
}
##datu sagatavošana
data<-yield
maturity<c(3,6,9,12,24,60,84,120)
yn<-NROW(maturity)
n<-NROW(data[,1])
yy<-data/1200
bigtheta<-c(9.832031e-01, -1.776581e-04, 1.596507e-04, 2.092566e-04, -4.152062e-02, -5.216358e+00,
-1.267185e+02, 6.040886e-05, 1.420373e-04) # sākuma dati
res1<-optim(par=bigtheta, llfn,method="Nelder-Mead", control=list(trace=2, maxit=500)) #optimizācija
##prognoze
xT<-XNS
f_shadow<-f_yield(xT, sum1, data,RR=1200, Y=FALSE)
f_s<-f_shadow[[1]]
yield_forecast<-matrix(data=0, nrow=10,ncol=8)

```

```

for(i in 1:10){
Xt_t<-f_s[i,]
Xt_lag <-mju+Phi_bar%%Xt_t
sigmat_lag<-Phi_bar%%sigmat_t%%t(Phi_bar)+SS
shift = -0.5

rezultats<-teorija(Xt_lag,alpha, bet, fai, sigmat_lag, shift)
y_obst<-rezultats[,1]
dy_obst<-as.matrix(rezultats[,2:3])
yield_forecast[i,]<-y_obst*1200
}
f_shadow<-f_yield(xT, sum1, data,RR=1200, Y=TRUE)
write.csv(sum1, file = "Shadow_rate.csv") # rezultātu saglabāšana

###Latvijas datu aproksimācija
rate<-yield
rate<-as.data.frame(apply(rate, 2,as.numeric))
rate<-as.matrix(rate)
time<-as.matrix(int)
poly.f <- function(x, a, b, d,c) {
  (c * x^3)+(a * x^2) + (b * x) + d
}
new_m<-c(30/360,90/360,180/360,270/360,1,2,3,4,5,7,10)#jaunu datu periodi
new_rates<-matrix(data=0, ncol=length(new_m), nrow=NROW(time[,1]))
###optimizācijas cikls
rs<-matrix(data=0, nrow=NROW(time[,1]), ncol=4)
for(j in 1:NROW(rate[,1])){
  int<-as.vector(time[j,which(is.na(rate[j,])==FALSE)])
  t<-as.vector(as.matrix((int), ncol=1, nrow=length(int)))
  r<-as.vector(rate[j,which(is.na(rate[j,])==FALSE)])
  fit <- stats::nls(r ~ poly.f(t, a, b, d,c), start = c(a = 1, b = 1, d = 1,c=1))
  rs[j,]<-c(coef(fit)[1],coef(fit)[2],coef(fit)[3],coef(fit)[4])
}
trend<-matrix(data=0, nrow=NROW(rate[,1]), ncol=length(new_m))
for(i in 1:NROW(rate[,1])){

```

```

rtt<-rs[i,]
trend[i,] <- poly.f(new_m, a = rtt[1], b = rtt[2], d = rtt[3], c = rtt[4])
}
plot(new_m, trend[11,], type="l")
lines(t,r, col="red")
plot(trend[1,], type="l", ylim=c(-1,0), main="LV bond yield")
for(i in 2:11){
  lines(trend[i,])
}
write.csv(trend, file = "LV_yield.csv") #saglabāja jaunus datus

###Galveno komponentu analīze
ES<- read_excel("C:/Users/Aleksejs/Desktop/Shadow_rates_all.xlsx", sheet="ES")
FR<- read_excel("C:/Users/Aleksejs/Desktop/Shadow_rates_all.xlsx", sheet="FR")
PL<- read_excel("C:/Users/Aleksejs/Desktop/Shadow_rates_all.xlsx", sheet="PL")
LV<- read_excel("C:/Users/Aleksejs/Desktop/Shadow_rates_all.xlsx", sheet="LV")
DE<- read_excel("C:/Users/Aleksejs/Desktop/Shadow_rates_all.xlsx", sheet="DE")
start<-c(2010,2)
end<-c(2021,2)
m<-1##katras modelis (1 -Rudenbush, 2-V.A m, 3-L.Krippner, 4- V.A)
DE<-ts(DE[,m], start=start,end=end, frequency = 12)
FR<-ts(FR[,m], start=start,end=end, frequency = 12)
PL<-ts(PL[,m], start=start,end=end, frequency = 12)
data<-data.frame(DE, FR, ES[,m], PL)
pca<- prcomp(data, center = TRUE, scale = TRUE)
summary(pca) #rezultats
plot(ts(-pca$x[,1], start=start,end=end, frequency = 12), type="l", lwd=4,lty=3, ylab="Procenti", xlab="Laiks",
      main="PCA V.A yield", ylim=c(-4,5))###pirmais faktors / Rudenbush /V.A makro/L.Krippnera
legend("bottomleft", c("1PC"), col= c("black"), lty =c(3), cex=1.5, lwd=3)
lines(DE, col="black", lty=1, lwd=2)
lines(FR, col="red", lwd=2)
lines(PL, col="blue", lwd=2)
lines(ts(ES[,m], start=start,end=end, frequency = 12), col="green", lwd=2)
legend("topright", c("DE","FR","PL", "ES"), col= c("black", "red","blue","green"), lty =c(1), cex=1.5)

```

```

##Regresijas analīze
DE<-read_excel("C:/Users/Aleksejs/Desktop/DE_yield.xlsx", sheet="Sheet2")
DE_spread<-matrix(data=0, nrow=NROW(DE[,2]), ncol=1)
DE_3M<-data.frame(DE[,2])
DE_10Y<-data.frame(DE[,9])
for(i in 1:NROW(DE[,2])){
DE_spread[i]<-(DE_10Y-DE_3M)
}
DE_spread<-DE_spread[[2]]
DE_m<-data.frame(read_excel("C:/Users/Aleksejs/Desktop/DE_macro.xlsx", sheet="Sheet1")[2:3])
model<-lm(DE_spread ~ DE_m$un+DE_m$inf-1) #labakais modelis
summary(model)
plot(ts(DE_spread,start=c(2010,2), end=c(2021,2),frequency=12),
      type="l", ylim=c(min(DE_m$inf),max(DE_m$un)), main="DE spread with INF&UN",ylab="Procenti",
      xlab="Laiks", lwd=2)
lines(ts(DE_m$un, start=c(2010,2), end=c(2021,2),frequency=12),col="red")
lines(ts(DE_m$inf, start=c(2010,2), end=c(2021,2),frequency=12), col="blue")
legend("bottomleft", c("spreads", "Inflacija", "Bezdarbs"), col= c("black", "blue", "red"), lty =c(1))

##Korrelācijas analīze
##tiek ielādēti visi dati
d_data<-ts(data.frame(DE_spread, FR_spread, ES_spread, PL_spread), start=c(2010,2), end=c(2021,2),
frequency = 12)
colnames(d_data)<-c("DE", "FR", "ES", "PL")
cc<-cor(d_data)
##with LV
d_L_data<-cbind(d_data[72:133,],LV_spread)
colnames(d_L_data)<-c("DE", "FR", "ES", "PL", "LV")
cc<-cor(d_L_data)
plot(d_data[,1], type="l", ylim=c(0,5.4), ylab="Procenti", xlab="Laiks") #grafiks
lines(d_data[,2], col="red")
lines(d_data[,3], col="blue")
lines(d_data[,4], col="green")

```

```

lines(ts(LV_spread, start=c(2016,1), end=c(2021,2), frequency = 12), col="brown", lwd=2)
abline(v=2016)
legend("topright", c("DE","FR", "ES", "PL","LV"), col= c("black", "red","blue", "green", "brown"), lty =c(1))

##10 gadīgas likmes - Vācijas 10 gadīgā likme
FR_10Y<-data.frame(FR[,9]) ##10 gadīgas likmes
ES_10Y<-data.frame(ES[,9])
LV_10Y<-data.frame(LV[,9]*100)
PL_10Y<-data.frame(PL[,9])
FR_S<-FR_10Y-DE_10Y
ES_S<-ES_10Y-DE_10Y
LV_S<-LV_10Y-DE_10Y$X10Y[(NROW(DE_10Y$X10Y)-NROW(LV_10Y)):NROW(DE_10Y$X10Y)]
PL_S<-PL_10Y-DE_10Y
plot(ts(LV_S$X10Y, start=c(2016,1), end=c(2021,2), frequency = 12),
      type="l", col="green", xlim=c(2010,2021.5),ylim=c(0,5.2), xlab="Laiks", ylab="Procenti", lwd=2)
lines(ts(FR_S, start=c(2010,2), end=c(2021,2), frequency = 12), col="red", lwd=2)
lines(ts(ES_S, start=c(2010,2), end=c(2021,2), frequency = 12), col="blue", lwd=2)
lines(ts(0, start=c(2010,2), end=c(2021,2), frequency = 12), col="orange", lwd=2)
legend("topright", c("LV","FR", "ES","DE"), col= c("green", "red","blue","orange"), lty =c(1), cex=1.5, lwd=2)

```